BEWEGUNG EINES PUNKTES
INNERHALB EINER NICHT HOMOGENEN STAUBMASSE
MIT CYLINDRISCHEN FLÄCHEN GLEICHER DICHTIGKEIT.

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ALS

INAUGURAL-DISSERTATION

VORGELEGT VON

EMIL SILBERNAGEL.

MÜNCHEN

DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB

1905.

BEWEGUNG EINES PUNKTES
INNERHALB EINER NICHT HOMOGENEN STAUBMASSE
MIT CYLINDRISCHEN FLÄCHEN GLEICHER DICHTIGKEIT.

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

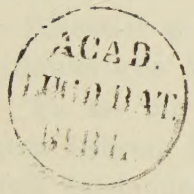
K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ALS

INAUGURAL-DISSERTATION

VORGELEGT VON

EMIL SILBERNAGEL.



MÜNCHEN
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB
1905.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547427_0023

Einleitung.

Die Bewegung eines Punktes innerhalb einer kosmischen Staubwolke ist bei Gelegenheit einer anderen [1]) Untersuchung behandelt worden. Dabei wurde jedoch auf eine Abnahme der Dichtigkeit mit der Entfernung von der Mitte nicht genügend Rücksicht genommen. Man kann dies tun z. B., indem man sich die Staubmasse zusammengesetzt denkt aus lauter unendlich dünnen Schichten von ellipsoidischer Form, innerhalb deren die Dichtigkeit konstant ist. Ich habe mir die Aufgabe gestellt, unter der Annahme von zylindrischen Formen für die Flächen gleicher Dichtigkeit diesen Gegenstand zu behandeln. Denn die Aufgabe, die so entsteht, ist an sich interessant, und man kann, wenn auch durch weitläufige Entwicklungen, konvergente Reihen aufstellen, welche zur numerischen Rechnung geeignet sind.

Wir betrachten also eine von einem Kreiszylinder begrenzte kosmische Staubmasse, deren Dichtigkeit von der Mitte nach außen in der Richtung des Radiusvektor abnimmt. Die Axe dieses Zylinders sei klein im Verhältnis zum Radiusvektor. Alsdann kommen bei der Bewegung eines Punktes, der sich im Innern dieser Masse befindet, zweierlei Kräfte in Betracht, nämlich Anziehungskräfte und Widerstandskräfte. Wir nehmen nun an, daß die Dichtigkeit unserer Staubmasse so gering sei, daß diese letzteren vernachlässigt werden können, und wir haben dann zunächst nur die Gesamtanziehung des Zylinders oder das Potential zu berechnen. Zu diesem Zweck denken wir uns noch die diskontinuierliche Massenverteilung durch eine kontinuirleiche ersetzt.

Es sei mir nun auch an dieser Stelle noch gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor H. v. Seeliger, auf dessen Anregung diese Arbeit entstanden ist, für die nachdrückliche Unterstützung und das jederzeitige gütige Entgegenkommen bei der Anfertigung derselben meinen aufrichtigsten Dank aussprechen zu dürfen.

[1]) A. N. 3030 R. Harzer: Über die Bewegung des Merkurperihels.

§ 1.

Das Potential eines mit Masse erfüllten Kreiszylinders, dessen Dichtigkeit in der Richtung des Radius mit der Entfernung vom Mittelpunkt abnimmt, in Bezug auf einen in seinem Innern gelegenen Punkt.

Es sei der Radius des Kreiszylinders $\mathfrak{r}$, seine halbe Höhe h; durch den Mittelpunkt O legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem $X\ Y\ Z$, dessen eine Achse, die Achse der X, mit der Achse h des Zylinders zusammenfalle; die Masse des angezogenen Punktes sei M, seine Koordinaten $x\ y\ z$, die Masse des anziehenden Punktes, eines Elementes des Zylinders, sei P, seine Koordinaten $a\ b\ c$; sind ferner r und s die Projektionen der Radienvektoren $O\,M$ bezw. $O\,P$ auf die $Y\,Z$-Ebene und ψ und ω bezw. die Winkel, die von diesen Projektionen und der Y-Achse gebildet werden, so ist:

$$y = r \cdot \cos\psi \qquad \text{ebenso} \qquad b = s \cdot \cos\omega$$
$$z = r \cdot \sin\psi \qquad\qquad\quad\ \ c = s \cdot \sin\omega$$

und die Entfernung $M\,P$ wird:

$$T = \sqrt{(x-a)^2 + r^2 + s^2 - 2\,r\,s\cos(\psi-\omega)}.$$

Bezeichnet man aber die Dichtigkeit im Punkte $(a,\ b,\ c)$ mit $\varkappa$, so ist der Ausdruck für das Potential:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\mathfrak{r}}\int_{-h}^{+h} \frac{\varkappa \cdot s\,ds\,da\,d\omega}{T}.$$

Es ist aber:

[1] $$\frac{1}{T} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \cos\nu(\psi-\omega)\int_0^{\infty} e^{\mp(x-a)\lambda}\,J_\nu(\lambda\,r)\,J_\nu(\lambda\,s)\,d\lambda,$$

[1] Heine: Handbuch der Kugelfunktionen.

wobei $(x - a)$ stets positiv ist und der Strich Σ' zu bedeuten hat, daß das Glied $\nu = 0$ mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden soll. Die $J_\nu(\lambda r)$ und $J_\nu(\lambda s)$ sind Besselsche Funktionen.

Für den allgemeinen Fall, daß die Dichtigkeit eine Funktion der Entfernung vom Mittelpunkt überhaupt ist, hat man (nach Heine):

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \{\cos(\nu\omega)\, C_\nu(a, s) + \sin(\nu\omega)\, \mathfrak{S}_\nu(a, s)\}.$$

Ist aber z nur eine Funktion von s allein, so ist $\nu = 0$ und es wird:

$$z = \tfrac{1}{2} C_0(s) = f(s).$$

Man erhält somit für den vorgeschriebenen Fall als Ausdruck für das Potential:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_{-h}^{+h} f(s)\, s\, d\, s\, d\, a\, d\, \omega \int_0^{\infty} e^{\mp(x-a)\lambda}\, J_0(\lambda r)\, J_0(\lambda s)\, d\lambda.$$

Da aber der angezogene Punkt ein innerer ist und der Koeffizient von λ im Exponenten von e stets positiv bleiben muß, so hat man zu unterscheiden zwischen Massenteilchen, deren Ordinate $a < x$ und $a > x$ ist, und demgemäß das Integral über $d\, a$ in zwei Teile zu zerlegen, nämlich:

$$\int_{-h}^{+h} e^{\mp(x-a)\lambda}\, d\, a = \int_{-h}^{x} e^{-(x-a)\lambda}\, d\, a + \int_{x}^{+h} e^{-(a-x)\lambda}\, d\, a.$$

Setzt man diese beiden Teilintegrale in den vorhergehenden Ausdruck von V ein und führt man noch zugleich die Integration nach $d\, \omega$ aus, so erhält man als endgültigen Ausdruck für das Potential:

$$\begin{aligned} V = {} & 2\pi \int_{-h}^{x} d\, a \int_0^{r} f(s)\, s\, d\, s \int_0^{\infty} e^{-(x-a)\lambda}\, J_0(\lambda r)\, J_0(\lambda s)\, d\lambda \\ & + 2\pi \int_{x}^{+h} d\, a \int_0^{r} f(s)\, s\, d\, s \int_0^{\infty} e^{-(a-x)\lambda}\, J_0(\lambda r)\, J_0(\lambda s)\, d\lambda. \end{aligned} \qquad \text{I)}$$

Dieser Ausdruck ist nun weiter auszuführen.

Ersetzt man eine der Besselschen Funktionen durch ihren Integralausdruck:

$$J_0(\lambda r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ir\cos\omega\cdot\lambda}\, d\omega,$$

so wird das Integral über $d\lambda$:

$$\int_0^\infty e^{-(x-a)\lambda} J_0(\lambda r) J_0(\lambda s)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega \int_0^\infty e^{-(x-a-ir\cos\omega)\lambda} J_0(\lambda s)\, d\lambda.$$

Nach der bekannten Formel aber:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+s^2}} = \int_0^\infty e^{-\sigma\cdot\lambda} J_0(\lambda s)\, d\lambda$$

wird:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega \int_0^\infty e^{-(x-a-ir\cos\omega)\lambda} J_0(\lambda s)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{(x-a-ir\cos\omega)^2+s^2}}.$$

Also wird das Integral über $d\lambda$:

$$\int_0^\infty e^{-(x-a)\lambda} J_0(\lambda r) J_0(\lambda s)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{(x-a-ir\cos\omega)^2+s^2}}$$

und analog:

$$\int_0^\infty e^{-(a-x)\lambda} J_0(\lambda r) J_0(\lambda s)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{(a-x-ir\cos\omega)^2+s^2}}.$$

Demnach wird der Ausdruck für das Potential:

$$V = 2\pi \cdot \int_{-h}^{x} da \int_0^r f(s)\, s\, ds\, \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{(x-a-ir\cos\omega)^2+s^2}}$$
$$+ 2\pi \int_x^{+h} da \int_0^r f(s)\, s\, ds\, \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{(a-x-ir\cos\omega)^2+s^2}}. \qquad \text{II)}$$

Das Gesetz der Massenverteilung im Innern des Zylinders soll nicht durch eine einfache Funktion definiert sein; es werde nur angenommen, daß die Dichtigkeit mit der Entfernung vom Mittelpunkt O in der Richtung des Radiusvektor abnehme. Man wird daher genötigt sein, den Verlauf der Dichtigkeit interpolatorisch darzustellen. Nimmt man etwa an, die Funktion $f(s)$ lasse sich in eine Potenzreihe entwickeln von der Form:

$$f(s) = A_0 + A_1\left(\frac{s}{r}\right) + A_2\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \cdots, \qquad \text{III)}$$

so bricht man diese Reihe bei einem endlichen Gliede $A_n \left(\frac{s}{\mathfrak{r}}\right)^n$ ab und wird somit einen näherungsweisen Ausdruck für den Verlauf der Dichtigkeit erhalten, dessen Genauigkeit von der Anzahl der Glieder der Reihe abhängt. Sind $\varrho_0\ \varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_n$ die numerisch gegebenen Werte der Dichtigkeit in den Entfernungen $s_0 = 0,\ s_1\ s_2 \ldots s_n$, so hat man zur Bestimmung der Koeffizienten die Bedingungen:

$$\varrho_0 = A_0,$$

$$\varrho_1 = A_0 + A_1\left(\frac{s_1}{\mathfrak{r}}\right) + A_2\left(\frac{s_1}{\mathfrak{r}}\right)^2 + \cdots A_n\left(\frac{s_1}{\mathfrak{r}}\right)^n,$$

. . . . . .

$$\varrho_n = A_0 + A_1\frac{s_n}{\mathfrak{r}} + A_2\left(\frac{s_n}{\mathfrak{r}}\right)^2 + \cdots A_n\left(\frac{s_n}{\mathfrak{r}}\right)^n,$$

wo gemäß obiger Festsetzung: $\varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2 \ldots > \varrho_n$ ist.

Subtsituiert man nun diesen Ausdruck für $f(s)$ in die Gleichung (II) und setzt noch zur Abkürzung:

$$x - a - i\,r\cos\omega = \alpha \qquad \text{und} \qquad a - x - i\,r\cos\omega = \beta,$$

ferner:

$$\int_0^{\mathfrak{r}} \frac{s^n\,ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} = K_n \qquad\qquad \int_0^{\mathfrak{r}} \frac{s^n\,ds}{\sqrt{\beta^2 + s^2}} = K_n',$$

so stellt sich das Potential gemäß des Ansatzes (III) für $f(s)$ dar in Form der endlichen Reihe:

$$\frac{V}{2\pi} = \sum_0^b A_n \cdot V_n, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots b), \tag{IV}$$

wo gesetzt ist das allgemeine Glied V_n:

$$V_n = \int_{-h}^{x} d\,a\,\mathfrak{r}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{K_{n+1}}{\mathfrak{r}^{n+1}}\,d\,\omega + \int_{x}^{+h} d\,a\,\mathfrak{r}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{K_{n+1}'}{\mathfrak{r}^{n+1}}\,d\,\omega. \tag{IVa}$$

Es ist nun die weitere Aufgabe, dieses allgemeine Glied V_n zu integrieren; dabei sei zunächst bemerkt, daß der zweite Teil dieses Ausdrucks in ganz analoger Weise zu behandeln ist wie der erste, nur daß im zweiten da β zu setzen ist, wo im ersten a und $h - x$, wo im ersten $h + x$ steht. Ich beschränke mich daher durchgehends auf die Integration des ersten Teiles, welcher mit $V_n^{(a)}$ bezeichnet werden möge, also:

$$V_n^{(a)} = \mathfrak{r} \int_{-h}^{x} d\,a\, \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{K_{n+1}}{\mathfrak{r}^{n+1}}\, d\omega. \qquad \text{IV b)}$$

Zunächst ergibt die Integration des Ausdrucks:

$$\int_0^{\tau} \frac{s^{n+1}}{\sqrt{a^2+s^2}}\, ds = K_{n+1},$$

wie weiter unten ausgeführt werden soll, folgende beide Reihen:

1. für n gerade:

$$\frac{K_{n+1}}{\mathfrak{r}^{n+1}} = \mathfrak{D}^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^{n+1} + \mathfrak{A}_0^n + \mathfrak{A}_2^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^2 + \mathfrak{A}_4^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^4 + \ldots \text{ in inf.}$$

2. für n ungerade:

$$\frac{K_{n+1}}{\mathfrak{r}^{n+1}} = \mathfrak{C}^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^{n+1} \cdot \log \frac{a}{2\,\mathfrak{r}} + \mathfrak{B}_0^n + \mathfrak{B}_2^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^2 + \mathfrak{B}_4^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^4 + \ldots \text{ in inf.} \qquad \text{A)}$$

Dieselben schreiten fort nach Potenzen von $\left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)$ und enthalten außerdem noch die Glieder $\mathfrak{D}^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^{n+1}$ und $\mathfrak{C}^n \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^{n+1} \cdot \log \frac{a}{2\,\mathfrak{r}}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die $\mathfrak{D}^n$, $\mathfrak{A}_0^n$, $\mathfrak{A}_2^n$, etc., $\mathfrak{C}^n$, $\mathfrak{B}_0^n$, $\mathfrak{B}_2^n$ etc. sind numerische Zahlenkoeffizienten.

Integriert man nun jede dieser beiden Reihen gliedweise nach $d\omega$, bildet also: $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{K_{n+1}}{\mathfrak{r}^{n+1}}\, d\omega$, so erhält man, wenn man zunächst von den beiden erwähnten Gliedern absieht, je eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe; denn es ist bekanntlich für irgend ein beliebiges Glied $\left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^{\nu}$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)^{\nu} d\omega = \frac{1}{\mathfrak{r}^{\nu}} \left[(x-a)^2 + r^2\right]^{\frac{\nu}{2}} P^{\nu}\left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+r^2}}\right), \qquad \text{B)}$$

wo P^{ν} die νte Kugelfunktion ist.

Bildet man für dieses Glied das Integral:

$$\int_{-h}^{x} d\,a \left\{ \frac{1}{\mathfrak{r}^{\nu}} \left[(x-a)^2 + r^2\right]^{\frac{\nu}{2}} P^{\nu}\left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+r^2}}\right) \right\},$$

so wird, wie sogleich gezeigt werden soll:

$$\int_{-h}^{x} da \cdot \left\{ \frac{1}{r^\nu} [(x-a)^2 + r^2]^{\frac{\nu}{2}} P^{\nu}\left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+r^2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\nu+1} \cdot \frac{1}{r^\nu} [(h+x)^2 + r^2]^{\frac{\nu+1}{2}} \cdot P^{\nu+1}\left(\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+r^2}}\right) + \varepsilon \cdot \frac{r^{\nu+1}}{\nu+1}, \qquad \text{C)}$$

also abermals eine Kugelfunktion; und zwar ist dieselbe um einen Grad höher als die ursprüngliche. Das Zusatzglied $\varepsilon \cdot \frac{r^{\nu+1}}{\nu+1}$ ist für gerade ν gleich 0, für ungerade ν dagegen ist:

$$\varepsilon = +(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{r^\nu} \frac{1 \cdot 3 \ldots \nu}{2 \cdot 4 \ldots \nu+1}.$$

Man sieht also aus den Formeln (A) und (C), daß der erste Teil des allgemeinen Gliedes von V_n, $V_n^{(\alpha)}$ (Gleichung IV b) der Hauptsache nach sich darstellt als eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$\mathfrak{A}_\nu^n \frac{1}{\nu+1} \frac{1}{r^\nu} [(h+x)^2 + r^2]^{\frac{\nu+1}{2}} P^{\nu+1}\left(\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+r^2}}\right).$$

Zum Beweis der Formel (C) setze man abkürzungshalber $x - a = y$ und mache die Substitution:

$$\frac{y^2}{y^2+r^2} = z^2,$$

dann wird:

$$y = \frac{r \cdot z}{\sqrt{1-z^2}}; \quad dy = \frac{r\,dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{und} \quad y^2 + r^2 = \frac{r^2}{1-z^2},$$

folglich:

$$\frac{1}{\nu+1} [y^2+r^2]^{\frac{\nu+1}{2}} P^{\nu+1}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right) \frac{1}{\nu+1} \cdot \frac{r^{\nu+1}}{(1-z^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \cdot P^{\nu+1}(z) = J.$$

Nun bilde man:

$$\frac{dJ}{dz} = \frac{r^{\nu+1}}{\nu+1} \left\{ \frac{(\nu+1) \cdot z}{(1-z^2)^{\frac{\nu+3}{2}}} \cdot P^{\nu+1}(z) + \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \cdot \frac{d\,P^{\nu+1}(z)}{dz} \right\}$$

$$= \frac{r^{\nu+1}}{(1-z^2)^{\frac{\nu+3}{2}}} \left\{ z \cdot P^{\nu+1}(z) + \frac{1-z^2}{1+\nu} \cdot \frac{d\,P^{\nu+1}(z)}{dz} \right\}. \qquad \text{a)}$$

Nun ist aber: [1])

$$(1-z^2)\,\frac{d\,P^{\nu+1}(z)}{dz} = -(\nu+1)(\nu+2)\int P^{\nu+1}(z)\,dz = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2\nu+3}\left(P^{\nu}(z) - P^{\nu+2}(z)\right)$$

und: [2])

$$(\nu+2)\,P^{\nu+2}(z) + (\nu+1)\,P^{\nu-2}(z) = (2\nu+3)\cdot z\cdot P^{\nu+1}(z),$$

daher also:

$$(1-z^2)\,\frac{d\,P^{\nu+1}(z)}{dz} = \frac{1}{2\nu+3}\left\{-(\nu+2)\,P^{\nu+2}(z) + (\nu+2)\,P^{\nu}(z)\right\} \qquad \text{b)}$$

$$z\cdot P^{\nu+1}(z) = \frac{1}{2\nu+3}\left\{(\nu+2)\,P^{\nu+2}(z) + (\nu+1)\,P^{\nu}(z)\right\}. \qquad \text{c)}$$

Addiert man die beiden Gleichungen (b) und (c), so erhält man für den Klammerausdruck der Gleichung (a):

$$\frac{(1-z^2)}{1+\nu}\cdot\frac{d\,P^{\nu+1}(z)}{dz} + z\cdot P^{\nu+1}(z) = P^{\nu}.$$

Also:

$$\frac{dJ}{dz} = \frac{r^{\nu+1}}{(1-z^2)^{\frac{\nu+3}{2}}}\cdot P^{\nu}(z)$$

und:

$$J = r^{\nu+1}\int\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{\nu+3}{2}}}\cdot P^{\nu}(z)\,dz,$$

oder:

$$\frac{1}{\nu+1}\,[y^2+r^2]^{\frac{\nu+1}{2}}\,P^{\nu+1}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right) = \int[y^2+r^2]^{\frac{\nu}{2}}\,P^{\nu}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right). \qquad \text{d)}$$

Setzt man noch in Bezug auf y die Integrationsgrenzen 0 (untere) und $h+x$ (obere Grenze) ein, so erhält man, abgesehen von dem Gliede $\varepsilon\cdot\frac{r^{\nu+1}}{\nu+1}$ die obige Formel (C). Für gerade ν gilt Formel (d), ohne weiteres; für un-

[1]) Heine: Handbuch der Kugelfunktionen, S. 93.
[2]) Heine: Handbuch der Kugelfunktionen, S. 91.

gerade ν ist aber zu bemerken, daß in dem Ausdruck auf der linken Seite von (d) noch ein von y unabhängiges Glied, nämlich: $(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots \nu}{2 \cdot 4 \ldots \nu+1} \cdot \frac{r^{\nu+1}}{\nu+1}$ enthalten ist, welches auf der rechten Seite nicht vorkommt; dasselbe muß daher mit verkehrtem Vorzeichen links noch hinzugefügt werden.

Zu der Formel (C) gelangt man auch auf folgende Weise:

Setzt man nämlich zur Abkürzung in Formel (B):

$$x - a = y$$

und entwickelt den Ausdruck $(y^2 + r^2)^{\frac{\nu}{2}} \cdot P^{\nu}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right)$, so erhält man die hypergeometrische Reihe:

$$(y^2 + r^2)^{\frac{\nu}{2}} P^{\nu}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right) = y^{\nu} \cdot F\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu-1}{2}, 1, \left(\frac{r}{y}\right)^2\right). \qquad \text{a)}$$

Integriert man nach dy, so erhält man wieder eine hypergeometrische Reihe:

$$\int (y^2 + r^2)^{\frac{\nu}{2}} P^{\nu}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right) dy = \frac{y^{\nu+1}}{\nu+1} \cdot F\left(-\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}, 1, \left(\frac{r^2}{y}\right)\right). \qquad \text{b)}$$

Diese unterscheidet sich aber von der ursprünglichen nur dadurch, daß $\nu+1$ an Stelle von ν gesetzt ist; man wird also haben:

$$\frac{y^{\nu+1}}{\nu+1} F\left(-\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}, 1, \left(\frac{r}{y}\right)^2\right) = \frac{1}{\nu+1} (y^2 + r^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \cdot P^{\nu+1}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\right), \qquad \text{c)}$$

wobei für ν gerade und ν ungerade die obige Bemerkung gilt.

Bezeichnet man endlich zur Abkürzung allgemein:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{r^{\nu}} \cdot [(h+x)^2 + r^2]^{\frac{\nu+1}{2}} P^{\nu+1}\left(\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+r^2}}\right) & \text{mit } \mathfrak{P}_{\nu+1}(h+x, r), \\ \frac{1}{r^{\nu}} [(h-x)^2 + r^2]^{\frac{\nu+1}{2}} P^{\nu+1}\left(\frac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2+r^2}}\right) & \text{mit } \mathfrak{P}_{\nu+1}(h-x, r) \end{array}\right\} \quad \text{D)}$$

so erhält man als Resultat der Integration des Ausdruckes V_n (IV a) gemäß der Formeln (A), (B), (C):

für n gerade:

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\mathfrak{r}} &= \mathfrak{D}^n_{\frac{1}{n+2}}\left\{\mathfrak{P}_{n+2}(h+x,\,r) + \mathfrak{P}_{n-2}(h-x,\,r) + 2\cdot\varepsilon\cdot r^{n+2}\right\} + \mathfrak{A}_0\cdot 2h \\ &+ \mathfrak{A}^n_2\cdot\tfrac{1}{3}\left\{\mathfrak{P}_3(h+x,\,r) + \mathfrak{P}_3(h-x,\,r)\right\} \\ &+ \mathfrak{A}^n_4\,\tfrac{1}{5}\left\{\mathfrak{P}_5(h+x,\,r) + \mathfrak{P}_5(h-x,\,r)\right\} \qquad \text{V a)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

für n ungerade:

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\mathfrak{r}} &= \mathfrak{C}^n\left\{\int_{-h}^{x} da\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\omega\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right)^{n+1}\log\frac{\alpha}{2\mathfrak{r}} + \int_{x}^{+h} da\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\omega\left(\frac{\beta}{\mathfrak{r}}\right)^{n+1}\log\frac{\beta}{2\mathfrak{r}}\right\} + \mathfrak{B}^n_0\,2h \\ &+ \mathfrak{B}^n_2\cdot\tfrac{1}{3}\left\{\mathfrak{P}_3(h+x,\,r) + \mathfrak{P}_3(h-x,\,r)\right\} \qquad \text{V b)} \\ &+ \mathfrak{B}^n_4\cdot\tfrac{1}{5}\left\{\mathfrak{P}_5(h+x,\,r) + \mathfrak{P}_5(h-x,\,r)\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Die in (V b) noch vorkommenden Integrale können für jeden einzelnen Fall leicht berechnet werden, hier soll nur der Fall $n=1$, also die Berechnung des Integrals:

$$J = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\int_{-h}^{x} da\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\alpha^2\log\frac{\alpha}{2\mathfrak{r}}\,d\omega + \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\int_{x}^{+h} da\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\beta^2\log\frac{\beta}{2\mathfrak{r}}\,d\omega \qquad \text{VI)}$$

durchgeführt werden, da nur dieser in der folgenden Anwendung, wo die Reihe (IV) mit $b=2$ abgebrochen werden wird, in Betracht kommt.

Setzt man wieder abkürzungshalber $x-a=y$, so hat man zunächst das Integral zu bilden:

$$J' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(y - i\,r\cos\omega)^2\log(y - i\,r\cos\omega)\,d\omega.$$

Setzt man:

$$J'_0 = \int_0^{\pi}\log(y - i\,r\cos\omega)\,d\omega; \quad J'_1 = \int_0^{\pi}\log(y - i\,r\cos\omega)\cos\omega\,d\omega$$

$$J'_2 = \int_0^{\pi}\log(y - i\,r\cos\omega)\cos^2\omega\,d\omega,$$

so ist:

$$\pi \cdot J' = y^2 J_0' - 2\,i\,r\,y\,J_1' - r^2 J_2'.$$

Nun hat man die bekannten Formeln:

1) $\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{y^2 + r^2 \cos^2 \omega} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 + r^2}}$

2) $\int \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + r^2}}\, dy = \frac{1}{2}\, y \sqrt{y^2 + r^2} - \frac{r^2}{2} \log (y + \sqrt{y^2 + r^2})$

3) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \omega}{y^2 + r^2}\, d\omega = \frac{\pi}{r^2} \left\{ 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + r^2}} \right\}$

4) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \omega}{y^2 + r^2}\, d\omega = \frac{\pi}{r^2} \left\{ -1 + \frac{\sqrt{y^2 + r^2}}{y} \right\}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\cos \omega)\, d\omega = -\frac{\pi}{2} \log 2$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\cos \omega) \cos^2 \omega\, d\omega = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \log 2\,.$

Es wird also, wenn man $\int_0^{\pi}$ zerlegt,

$$J_0' = \int_0^{\pi} \log (y - i\,r \cos \omega)\, d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

und bemerkt, daß ist:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log (y - i\,r \cos \omega)\, d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (y + i\,r \cos \omega)\, d\omega:$$

$$J_0' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (y^2 + r^2 \cos^2 \omega)\, d\omega\,.$$

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial J_0'}{\partial y} = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{y^2 + r^2 \cos^2 \omega} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 + r^2}} \text{ (nach Formel 1)}$$

woraus:

$$J_0'(y) = \pi \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + r^2}} + I' = \pi \log (y + \sqrt{y^2 + r^2}) + I'.$$

Für $y = 0$ wird:

$$J_0'(0) = \pi \log r + I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (r^2 \cos^2 \omega)\, d\omega = \pi \log r + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\cos \omega)\, d\omega$$

und:

$$I' = -\pi \log 2.$$

Also:

$$J_0' = \pi \cdot \log \frac{(y + \sqrt{y^2 + r^2})}{2}. \qquad \text{a)}$$

Ferner:

$$J_1' = \int_0^{\pi} \log (y - i r \cos \omega)\, d(\sin \omega) = -i r \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \omega}{y - i r \cos \omega}\, d\omega$$

$$= -i r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega \left(\frac{1}{y - i r \cos \omega} + \frac{1}{y + i r \cos \omega} \right) d\omega,$$

$$J_1' = -2 i r y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \omega}{y^2 + r^2}\, d\omega = -\frac{i \pi}{r} \left\{ -y + \sqrt{y^2 + r^2} \right\}. \qquad \text{b)}$$

Drittens:

$$J_2' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (y - i r \cos \omega) \cos^2 \omega\, d\omega + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (y + i r \cos \omega) \cos^2 \omega\, d\omega$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (y^2 + r^2 \cos^2 \omega) \cos^2 \omega\, d\omega$$

$$\frac{\partial J_2'}{\partial y} = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \omega}{y^2 + r^2 \cos^2 \omega}\, d\omega = \frac{\pi}{r^2} \left\{ y - \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + r^2}} \right\}$$

$$J_2'(y) = \frac{\pi}{2r^2}\left\{y^2 - y\sqrt{y^2+r^2} + r^2 \log\left(y+\sqrt{y^2+r^2}\right)\right\} + I$$

$$J_2'(0) = \frac{\pi}{2}\log r + I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(r^2\cos^2\omega\right)\cos^2\omega\, d\omega$$

$$= 2\log r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\omega\, d\omega + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos\omega)\cdot\cos^2\omega\, d\omega$$

$$= \log r\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\log 2,$$

also:

$$I' = \frac{\pi}{2r^2}\left\{\frac{r^2}{2} - r^2\log 2\right\}$$

und daher:

$$J_2' = \frac{\pi}{2r^2}\left\{y^2 + \frac{r^2}{2} - y\sqrt{y^2+r^2} + r^2\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2+r^2}}{2}\right)\right\}. \qquad \text{c)}$$

Man erhält also gemäß der Formeln (a), (b) und (c) als Resultat der Integration des ersten Teiles von VI in Bezug auf $d\omega$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a^2 \log\frac{a}{2\mathfrak{r}}\, d\omega = \left\{y^2 - \tfrac{1}{2}r^2\right\}\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\right) + \tfrac{3}{2}\left\{y^2 - y\sqrt{y^2+r^2}\right\} - \tfrac{1}{4}r^2. \qquad \text{E)}$$

Nun verlangt dieser Ausdruck noch die Integration über da oder, da $x - a = y$, also $\int_{-h}^{x} da = \int_0^{h+x} dy$ gesetzt ist, über dy, so daß also zu bilden ist, wenn man wiederum nur den ersten Teil von J berücksichtigt und denselben mit J_α bezeichnet:

$$J_\alpha = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\cdot\int_0^{h+x} dy\left[\left\{y^2 - \tfrac{1}{2}r^2\right\}\log\frac{y+\sqrt{y^2+r^2}}{4\mathfrak{r}} + \tfrac{3}{2}\left\{y^2 - y\sqrt{y^2+r^2}\right\} - \tfrac{1}{4}r^2\right].$$

Die hier vorkommenden Integrale sind bekannt. Es ist nämlich:

1) $$\int_0^{h+x} y^2 \log\frac{y+\sqrt{y^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\, dy = \tfrac{1}{3}(h+x)^3\log\frac{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\sqrt{(h+x)^2+r^2}\left[\tfrac{1}{3}(h+x)^2 - \tfrac{2}{3}r^2\right] - \tfrac{2}{9}r^3$$

$$2)\ \int_0^{h+x} \log \frac{y+\sqrt{y^2+r^2}}{4\,\mathfrak{r}}\,dy = (h+x)\log\frac{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}{4\,\mathfrak{r}} - \sqrt{(h+x)^2+r^2} + r,$$

$$3)\ \int_0^{h+x} y\sqrt{y^2+r^2}\,dy = \tfrac{1}{3}\left[(h+x)^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}r^3.$$

Demnach wird mit Berücksichtigung des zweiten Teiles von J:

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}^2\cdot J = {} & \log\frac{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}{4\,\mathfrak{r}}\left\{\tfrac{1}{3}(h+x)^3-\tfrac{1}{2}r^2(h+x)\right\}+\sqrt{(h+x)^2+r^2}\left\{-\tfrac{1}{1\,8}(h+x)^2+\tfrac{2}{9}r^2\right\}+\\ & \log\frac{h-x-\sqrt{(h-x)^2+r^2}}{4\,\mathfrak{r}}\left\{\tfrac{1}{3}(h-x)^3-\tfrac{1}{2}r^2(h-x)\right\}+\sqrt{(h-x)^2+r^2}\left\{-\tfrac{1}{1\,8}(h-x)^2+\tfrac{2}{9}r^2\right\}\\ & -\tfrac{4}{9}r^3-\tfrac{1}{2}h\,r^2+h^3+3\,h\,x^2.\end{aligned} \qquad \text{VII)}$$

Nun erübrigt nur noch die Darstellung der auf Seite 8 angeführten Reihen (A) für K_{n+1}; setzt man der Einfachheit halber für den Augenblick $n+1=m$, so ist:

$$\int_0^{\mathfrak{r}} \frac{s^m\,ds}{\sqrt{\alpha^2+s^2}} = K_m.$$

Nun hat man die bekannten Rekursionsformeln:

$$K_m = \frac{1}{m}\,s^{m-1}\sqrt{\alpha^2+s^2} - \frac{m-1}{m}\,\alpha^2\,K_{m-2}$$

$$K_{m-2} = \frac{1}{m-2}\,s^{m-3}\sqrt{\alpha^2+s^2} - \frac{m-3}{m-2}\,\alpha^2\,K_{m-4}$$

. . . . . .

m ungerade $K_3 = \tfrac{1}{3}\,s^2\sqrt{\alpha^2+s^2} - \tfrac{2}{3}\,\alpha^2\,K_1$

m gerade $K_2 = \tfrac{1}{2}\,s\sqrt{\alpha^2+s^2} - \tfrac{1}{2}\,\alpha^2\,K_0.$

Durch fortwährende Anwendung derselben erhält man schließlich für K_m:

1) für m ungerade:

$$\begin{aligned}K_m = {} & \left[\frac{1}{m}\,s^{m-1} - \frac{m-1}{m(m-2)}\,s^{m-3}\,\alpha^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}\,s^{m-5}\,\alpha^4\right.\\ & \left. + \cdots (-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4}{m(m-2)(m-4)\ldots 3}\,s^2\,\alpha^{m-3}\right]\cdot\sqrt{\alpha^2+s^2},\\ & -(-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4}{m(m-2)(m-4)\ldots 3}\cdot 2\,\alpha^{m-1}\cdot K_1;\end{aligned}$$

2) für m gerade:

$$K_m = \left[\frac{1}{m}\cdot s^{m-1} - \frac{m-1}{m(m-2)}\,s^{m-3}\,\alpha^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}\,s^{m-5}\cdot\alpha^4 \right.$$
$$\left. + \ldots (-1)^{\frac{m-2}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\,s\cdot\alpha^{m-2}\right]\sqrt{\alpha^2+s^2}$$
$$-(-1)^{\frac{m-2}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\,\alpha^m\,K_0.$$

Setzt man nun für s die Integrationsgrenzen ein und macht $\frac{\alpha}{\mathfrak{r}} = \xi$, so wird:

1) für m ungerade:

$$\frac{m\cdot K_m}{\mathfrak{r}^m} = \left[1 - \frac{m-1}{m-2}\,\xi^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\,\xi^4 + \ldots + (-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4}{(m-2)(m-4)\ldots 3}\,\xi^{m-3}\right]\cdot\sqrt{1+\xi^2}$$
$$-(-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{(m-2)(m-4)\ldots 3}\cdot\xi^{m-1}\left(\frac{K_1}{\xi}\right);$$

2) für m gerade:

$$\frac{m\cdot K_m}{\mathfrak{r}^m} = \left[1 - \frac{m-1}{m-2}\,\xi^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\,\xi^4 + \ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{(m-2)(m-4)\ldots 2}\,\xi^{m-2}\right]\sqrt{1+\xi^2}$$
$$-(-1)^{\frac{m-2}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{(m-2)(m-4)\ldots 2}\,\xi^m\cdot K_0.$$

Nun ist aber noch:

$$\frac{K_1}{\xi} = \sqrt{1+\xi^2} - \xi \qquad \text{und:} \qquad K_0 = \log\frac{1+\sqrt{1+\xi^2}}{\xi},$$

also wird:

1) für m ungerade:

$$\frac{m\,K_m}{\mathfrak{r}^m} = \left[1 - \frac{m-1}{m-2}\,\xi^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\,\xi^4 + \ldots (-1)^{\frac{m-1}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{(m-2)(m-4)\ldots 3\cdot 1}\,\xi^{m-1}\right]\sqrt{1+\xi^2}$$
$$+(-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{(m-2)(m-4)\ldots 3\cdot 1}\,\xi^m;$$

2) für m gerade:

$$\frac{m\,K_m}{\mathfrak{r}^m} = \left[1 - \frac{m-1}{m-2}\,\xi^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\,\xi^4 + \ldots (-1)^{\frac{m-2}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\,\xi^{m-2}\right]\sqrt{1+\xi^2}$$
$$+(-1)^{\frac{m}{2}}\,\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\,\xi^m\log\frac{1+\sqrt{1+\xi^2}}{\xi}.$$

Nun ist $\xi < 1$, da $r < \mathfrak{r}$ vorausgesetzt ist und außerdem noch $x - a$ stets positiv bleiben muß; man kann daher sowohl die Wurzel $\sqrt{1+\xi^2}$ als auch den Logarithmus $\log(1+\sqrt{1+\xi^2})$ je in eine nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihe entwickeln. Die Entwickelungen ergeben:

$$\sqrt{1+\xi^2} = 1 + \tfrac{1}{2}\xi^2 - \tfrac{1}{8}\xi^4 + \tfrac{1}{16}\xi^6 \mp \ldots$$

$$\log(1+\sqrt{1+\xi^2}) = \log 2 + \tfrac{1}{4}\xi^2 - \tfrac{3}{32}\xi^4 + \tfrac{5}{96}\xi^6 \mp \ldots$$

Substituiert man diese Reihen für die Wurzel und den Logarithmus in den beiden Ausdrücken für $\frac{m K_m}{\mathfrak{r}^m}$, so erhält man:

1) für m ungerade:

$$\frac{K_m}{\mathfrak{r}^m} = (-1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots m-1}{3 \cdot 5 \ldots m} \xi^m$$

$$+ \frac{1}{m}\left[1 - \frac{m-1}{m-2}\xi^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\xi^4 + \ldots (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots m-1}{1 \cdot 3 \ldots m-2} \xi^{m-1}\right]$$

$$\times \left[1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{8}\xi^4 \mp \ldots\right];$$

2) für m gerade:

$$\frac{K_m}{\mathfrak{r}^m} = (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots (m-1)}{2 \cdot 4 \ldots m} \xi^m \log\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{m}\left[1 - \frac{m-1}{m-2}\xi^2 + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\xi^4 + \ldots (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots m-1}{2 \cdot 4 \ldots m} \xi^{m-2}\right]$$

$$\times \left[1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{8}\xi^4 \pm \ldots\right] - (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots m-1}{2 \cdot 4 \ldots m} \xi^m \times \left[\tfrac{1}{4}\xi^2 - \tfrac{3}{32}\xi^4 \mp \ldots\right].$$

Oder setzt man wieder $n+1$ an Stelle von m, so wird:

1) für n gerade:

$$\frac{K_{n+1}}{\mathfrak{r}^{n+1}} = +(-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \ldots n}{3 \cdot 5 \ldots n+1} \xi^{n+1} \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{n+1}\left[1 - \frac{n}{n-1}\xi^2 + \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1)(n-3)}\xi^4 + \ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots n}{1 \cdot 3 \ldots n-1} \xi^n\right]$$

$$\times \left[1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{8}\xi^4 \mp \ldots\right];$$

2) für n ungerade:

$$(2) \qquad \frac{K_{n+1}}{r^{n+1}} = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots n}{2 \cdot 4 \ldots n+1} \cdot \xi^{n+1} \log\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{n+1}\left[1 - \frac{n}{n-1}\xi^2 + \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1)(n-3)}\xi^4 + \ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots n}{2 \cdot 4 \ldots n+1} \xi^{n-1}\right]$$

$$\times\left[1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{8}\xi^4 \mp \ldots\right] - (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots n}{2 \cdot 4 \ldots n+1} \xi^{n+1} \times \left[\tfrac{1}{4}\xi^2 - \tfrac{3}{32}\xi^4 \pm \ldots\right].$$

Multipliziert man nun die in (1) und (2) enthaltenen Klammern aus und ordnet nach Potenzen von ξ, so erhält man unmittelbar die beiden Reihen (A). Es ist also für n gerade:

$$\vartheta^n = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots n}{3 \cdot 5 \ldots n+1}.$$

Die $\mathfrak{A}_0^n$, $\mathfrak{A}_2^n$, $\mathfrak{A}_4^n$ etc. sind die Summen der Faktoren gleicher Potenzen von ξ; und zwar wird, wie man leicht sieht:

$$\mathfrak{A}_0^n = 1$$

$$\mathfrak{A}_2^n = \binom{1}{2}_1 - \frac{n}{n-1}$$

$$\mathfrak{A}_4^n = \binom{1}{2}_2 - \binom{1}{2}_1 \frac{n}{n-1} + \binom{1}{2}_0 \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1) \cdot (n-3)}$$

. . . . . .

$$\mathfrak{A}_n^n = \binom{1}{2}_{\frac{n}{2}} - \binom{1}{2}_{n-\frac{2}{2}} \frac{n}{n-1} + \binom{1}{2}_{n-4} \frac{n \cdot n-2}{(n-1) \cdot (n-3)} + \ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{1}{2}_0 \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \ldots 4 \cdot 2}{(n-1) \cdot (n-3) \cdot (n-5) \ldots 3 \cdot 1}$$

$$\mathfrak{A}_{n+2}^n = \binom{1}{2}_{\frac{n+2}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{n}{2}} \frac{n}{n-1} + \ldots\ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{1}{2}_1 \frac{n \cdot (n-2)(n-4) \ldots 4 \cdot 2}{(n-1)(n-3)(n-5) \ldots 3 \cdot 1}$$

$$\mathfrak{A}_{n+4}^n = \binom{1}{2}_{\frac{n+4}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{n+2}{2}} \frac{n}{n-1} + \ldots\ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{1}{2}_2 \frac{n \cdot (n-2)(n-4) \ldots 4 \cdot 2}{(n-1)(n-3)(n-5) \ldots 3 \cdot 1}$$

. . . . . .

Man hat, wie hieraus ersichtlich ist, zu unterscheiden zwischen Gliedern, deren Potenzen $\leq n$, und solchen, deren Potenzen $> n$ sind. Für ein allgemeines Glied $\left(\frac{\alpha}{r}\right)^m$ wird der Koeffizient $\mathfrak{A}_m^n$ demnach:

1) wenn $m \leq n$

$$\mathfrak{A}_m^n = \binom{1}{2}_{\frac{m}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{m-2}{2}} \frac{n}{n-1} + \binom{1}{2}_{\frac{m-4}{2}} \frac{n\cdot(n-2)}{(n-1)\cdot(n-3)} + \ldots (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{1}{2}_0 \frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-m+2)}{(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\ldots(n-m+1)},$$

2) wenn $m > n$

$$\mathfrak{A}_m^n = \binom{1}{2}_{\frac{m}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{m-2}{2}} \frac{n}{n-1} + \binom{1}{2}_{\frac{m-4}{2}} \frac{n\cdot(n-2)}{(n-1)\cdot(n-3)} + \ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{1}{2}_{\frac{m-n}{2}} \frac{n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\ldots 4\cdot 2}{(n-1)\cdot(n-3)\cdot n-5)\ldots 3\cdot 1}.$$

Für ungerade n ist ferner:

$$\mathfrak{C}^n = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{1\cdot 3\ldots n}{2\cdot 4\ldots n+1}.$$

Die $\mathfrak{B}_0^n$, $\mathfrak{B}_2^n$, $\mathfrak{B}_4^n$ etc. sind ebenso wie die $\mathfrak{A}_0^n$ etc. der ersten Reihe für gerade n die Summen der Faktoren gleicher Potenzen von ξ, und zwar befolgen dieselben bis $\mathfrak{B}_m^n$ solange $m \leq n-1$ genau dasselbe Bildungsgesetz wie die $\mathfrak{A}_0^n$, $\mathfrak{A}_2^n$ etc.; man hat also unmittelbar: (m ist gerade)

$$\mathfrak{B}_0^n = 1$$

$$\mathfrak{B}_2^n = \binom{1}{2}_1 - \frac{n}{n-1}$$

$$\mathfrak{B}_4^n = \binom{1}{2}_2 - \binom{1}{2}_1 \frac{n}{n-1} + \binom{1}{2}_0 \frac{n\cdot(n-2)}{(n-1)\cdot(n-3)}$$

. . . . . .

$$\mathfrak{B}_{n-1}^n = \binom{1}{2}_{\frac{n-1}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{n-3}{2}} \frac{n}{n-1} + \quad \ldots \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{1}{2}_0 \frac{1\cdot 3\ldots n}{2\cdot 4\ldots n+1}$$

oder allgemein:

$$\mathfrak{B}_m^n = \binom{1}{2}_{\frac{m}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{m-2}{2}} \cdot \frac{n}{n-1} + \ldots (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{1}{2}_0 \frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-m+2)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-m+1)}.$$

Für $m > n+1$ erhält man zunächst wieder analog dem Gliede $\mathfrak{A}_m^n$ (wo $m > n$):

$$\mathfrak{B}_m^n = \binom{1}{2}_{\frac{m}{2}} - \binom{1}{2}_{\frac{m-2}{2}} \frac{n}{n-1} + \ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{1}{2}_{\frac{m-n+1}{2}} \frac{1\cdot 3\ldots n}{2\cdot 4\ldots n+1}$$

und außerdem aber noch als Zusatzglied, das aus der Entwicklung des $\log(1+\sqrt{1+\xi^2})$ entspringt:

$$-(-1)^{\frac{n+3}{2}}\frac{1\cdot 3\ldots n}{2\cdot 4\ldots n+1}\times\Big[\text{dem Faktor der } (m-n-1)\text{ten Potenz der Reihe:}$$

$$\tfrac{1}{4}\xi^2-\tfrac{3}{3\,2}\xi^4+\tfrac{5}{9\,6}\xi^6+\ldots\Big].$$

Nachstehend ist der Ausdruck für das Potential entwickelt, und zwar geht die Summe IV_0 bis $b=2$ und die Reihen A bis zur $\nu=6$ten Potenz. Man erhält so unter Anwendung der Formeln IV, A, Va, Vb und VII:

$$\frac{V}{2\mathfrak{r}\sqrt{\pi}}=A_0\Big\{2h-\frac{1}{2}\Big[\mathfrak{P}_2(h+x,r)+\mathfrak{P}_2(h-x,r)+\frac{r^2}{\mathfrak{r}}\Big]$$

$$+\frac{1}{3\cdot 2}\Big|\,\mathfrak{P}_3(h+x,r)+\mathfrak{P}_3(h-x,r)$$

$$-\frac{1}{5\cdot 8}\Big|\,\mathfrak{P}_5(h+x,r)+\mathfrak{P}_5(h-x,r)\Big|$$

$$+\frac{1}{7\cdot 16}\Big|\,\mathfrak{P}_7(h+x,r)+\mathfrak{P}_7(h-x,r)\Big\}$$

$$+A_1\Big\{\frac{1}{2}\cdot 2h+\frac{1}{3\cdot 4}\Big|\,\mathfrak{P}_3(h+x,r)+\mathfrak{P}_3(h-x,r)\Big|$$

$$-\frac{3}{5\cdot 16}\Big|\,\mathfrak{P}_5(h+x,r)+\mathfrak{P}_5(h-x,r)$$

$$+\frac{5}{7\cdot 64}\Big|\,\mathfrak{P}_7(h+x,r)+\mathfrak{P}_7(h-x,r)\Big|$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}^2}\Big(\log\frac{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\Big|\,\tfrac{1}{3}(h+x)^3-\tfrac{1}{2}r^2(h+x)\Big|+\sqrt{(h+x)^2+r^2}\,[-\tfrac{1}{1\,8}(h+x)^2+\tfrac{2}{9}r^2]\Big)$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}^2}\Big(\log\frac{h-x+\sqrt{(h-x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\Big|\,\tfrac{1}{3}(h-x)^3-\tfrac{1}{2}r^2(h-x)\Big|+\sqrt{(h-x)^2+r^2}\,[-\tfrac{1}{1\,8}(h-x)^2+\tfrac{2}{9}r^2]\Big)$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}^2}\Big|\,-\tfrac{4}{9}r^3-\tfrac{1}{2}hr^2+h^3+3hx^2\Big|\Big\}$$

$$+A_2\left\{\frac{1}{3}\cdot 2h-\frac{1}{3\cdot 2}\right|\mathfrak{P}_3(h+x,r)+\mathfrak{P}_3(h-x,r)$$

$$+\frac{2}{4\cdot 3}\left|\mathfrak{P}_4(h+x,r)+\mathfrak{P}_4(h-x,r)+\frac{3r^4}{4r^3}\right.$$

$$-\frac{3}{5\cdot 8}\left|\mathfrak{P}_5(h+x,r)+\mathfrak{P}_5(h-x,r)\right.$$

$$+\frac{5}{7\cdot 48}\left|\mathfrak{P}_7(h+x,r)+\mathfrak{P}_7(h-x,r)\right.\Bigg\}$$

§ 2.

Es sei nun der angezogene Punkt ein planetarischer Körper mit der Masse m; im Mittelpunkt O des Kreiszylinders stehe die Sonne und die Axe h stehe zunächst senkrecht auf der Ebene der Ekliptik. Dieser planetarische Körper wird alsdann infolge der Attraktion der Sonne innerhalb des Zylinders, — wie vorausgesetzt — eine Keplersche Ellipse beschreiben und außerdem noch der störenden Einwirkung der Masse des Zylinders unterworfen sein. Da nun die Dichtigkeit der Masse als so gering vorausgesetzt ist, daß Widerstandskräfte vernachlässigt werden können, so kommt hiebei nur die Anziehung des Zylinders in Betracht, die im vorigen Abschnitt berechnet worden ist. Es sollen nun hier speziell die säkularen Störungen behandelt werden, welche der planetarische Körper im Knoten und Perihel seiner Bahn erleidet. Da diese Elemente aber durch Widerstandskräfte überhaupt keine säkularen Änderungen erfahren, so sei hier noch bemerkt, daß das Resultat bei der folgenden Anwendung auf das Zodiakallicht, falls hier solche auftreten sollten, von der vorhin gemachten Einschränkung unabhängig ist.

Die Störungsfunktion lautet also:

$$V = k^2 \sum_{n=0}^{b} A_n V_n;$$

und die Gaußschen Störungsformeln, die hier angewendet werden sollen:

$$\left.\begin{aligned}\sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{n\cdot a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{1+m}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{W}{k^2}\cdot r\cdot\sin(v+\pi-\Omega)\,d\zeta\\ e\cdot\frac{d\pi}{dt} &= 2e\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}+\frac{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}{1+m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-R\cos v+S\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right]\frac{d\zeta}{k^2}.\end{aligned}\right\}\ \text{I)}$$

Oder wenn man statt der mittleren Anomalie ζ die wahre v einführt durch die Beziehung:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = n \cdot a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

woraus:

$$\frac{dv}{d\zeta} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2}$$

und:

$$d\zeta = \frac{dv \cdot (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos v)^2},$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{n \cdot a (1 - e^2)}{1 + m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W \cdot r \cdot \sin (v + \pi - \Omega)}{k^2 (1 + e \cos v)^2} dv \\ e \cdot \frac{d\pi}{dt} &= 2 e \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{n a^2 (1 - e^2)^2}{1 + m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[- R \cos v + S \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right]}{k^2 (1 + e \cos v)^2} dv. \end{aligned}\right\} \text{II)}$$

R. S, W sind die 3 Komponenten der Störungsfunktion und zwar ist

R die Komponente in der Richtung des Radiusvektors des Planeten,

S „ „ senkrecht zum Radiusvektor im Sinne der Bewegung,

W „ „ senkrecht zur Bahnebene.

Die Integration in Bezug auf dv muß wegen der Kompliziertheit der Störungsfunktion auf mechanischem Wege ausgeführt werden.

Hat man allgemein das Integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi (v) \, dv,$$

so teilt man nach der Angabe von Gauß die Planetenbahn in j gleiche Teile, und gibt dem v die Werte 0, $\frac{2\pi}{j}$ $\frac{4\pi}{j}$ $\ldots$ $(j-1) \frac{2\pi}{j}$ und berechnet alsdann die entsprechenden Werte der Funktion $\varphi (v)$; bezeichnet man diese mit φ_0, φ_1, φ_2, $\ldots$ φ_{j-1}, so wird:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi (v) \, dv = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_{j-1}}{j}.$$

Demnach erhält man für die Ausdrücke (II) die Form:

$$\left.\begin{aligned} \sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{n \cdot a(1-e^2)}{1+m} \cdot K \\ e \cdot \frac{d\pi}{dt} &= 2e \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{n a^2 (1-e^2)^2}{1+m} \cdot L, \end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

wo K und L die arithmetischen Mittel der $j-1$ gerechneten Werte von

$$\frac{W \cdot r \cdot \sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\left[-R\cos v + S\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right]}{(1+e\cos v)^2}$$

sind.

Nun sind zunächst die R, S, W zu berechnen.

Vertauscht man für den Augenblick x mit z, so hat man, wenn V die Störungsfunktion bedeutet, bekanntlich:

$$R = \frac{\partial V}{\partial x}\Big[\cos(v+\pi-\Omega)\cos\Omega - \sin(v+\pi-\Omega)\sin\Omega\cos i\Big]$$
$$+\frac{\partial V}{\partial y}\Big[\cos(v+\pi-\Omega)\sin\Omega + \sin(v+\pi-\Omega)\cos\Omega\cos i\Big] + \frac{\partial V}{\partial z}\sin(v+\pi-\Omega)\sin i$$

$$S = \frac{\partial V}{\partial x}\Big[-\sin(v+\pi-\Omega)\cos\Omega - \cos(v+\pi-\Omega)\sin\Omega\cos i\Big]$$
$$+\frac{\partial V}{\partial y}\Big[-\sin(v+\pi-\Omega)\sin\Omega + \cos(v+\pi-\Omega)\cos\Omega\cos i\Big] + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(v+\pi-\Omega)\sin i$$

$$W = \frac{\partial V}{\partial x}\Big[\sin\Omega\sin i\Big] + \frac{\partial V}{\partial y}\Big[-\cos\Omega\sin i\Big] + \frac{\partial V}{\partial z}\cos i.$$

Nun ist, wenn l die ekliptikale Länge des Planeten bedeutet:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\cos l \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\sin l.$$

Setzt man nun $l - \Omega = \lambda$ und setzt wieder x an Stelle von z ein, so wird:

$$R = \frac{\partial V}{\partial r}\Big[\cos(v+\pi-\Omega)\cos\lambda + \sin(v+\pi-\Omega)\sin\lambda\cos i\Big] + \frac{\partial V}{\partial x}\sin(v+\pi-\Omega)\sin i$$

$$S = \frac{\partial V}{\partial r}\Big[-\sin(v+\pi-\Omega)\cos\lambda + \cos(v+\pi-\Omega)\sin\lambda\cos i\Big] + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(v+\pi-\Omega)\sin i$$

$$W = \frac{\partial V}{\partial r}\Big[\qquad\qquad - \sin\lambda\sin i\Big] + \frac{\partial V}{\partial x}\cos i.$$

oder:

$$R = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\cos(v + \pi - \Omega)}{\cos \lambda} + \frac{\partial V}{\partial x} \sin(v + \pi - \Omega) \sin i$$

$$S = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\sin(v + \pi - \Omega + \lambda) \cdot \sin(v + \pi - \Omega - \lambda)}{\sin(v + \pi - \Omega) \cdot \cos \lambda} + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(v + \pi - \Omega) \sin i \quad \text{(IV)}$$

$$W = -\frac{\partial V}{\partial r} \sin \lambda \cdot \sin i + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \cos i,$$

da sich nämlich λ berechnet aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}(v + \pi - \Omega) \cdot \cos i.$$

Nun sind die Differentialquotienten der Störungsfunktion nach den Koordinaten r und x zu bilden. In dem Ausdruck für das Potential V kommen außer einfachen Funktionen von r und x aber nur Kugelfunktionen vor, und nach der Formel (C) im ersten Abschnitt ist der Differentialquotient derselben nach x ohne weiteres gegeben. Es ist nämlich, wenn man zugleich noch die Definitionsgleichungen D berücksichtigt:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu+1}(h + x, r)}{\partial x} = (\nu + 1) \cdot \frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{P}_\nu (h + x, r)$$

und (V)

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu+1}(h - x, r)}{\partial x} = -(\nu + 1) \frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{P}_\nu (h - x, r).$$

Aber auch der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu+1}}{\partial r}$ läßt sich leicht wieder durch Kugelfunktionen darstellen. Setzt man der Kürze halber für den Augenblick: $\frac{h + x}{\sqrt{(h + x)^2 + r^2}} = \xi$, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu+1}(h+x,r)}{\partial r} = (\nu+1) \cdot \frac{r}{\mathfrak{r}^\nu} \left[(h+x)^2 + r^2\right]^{\frac{\nu-1}{2}} P^{\nu+1}(\xi) - \frac{[(h+x)^2+r^2]^{\frac{\nu+1}{2}}}{\mathfrak{r}^\nu} \cdot \frac{dP^{\nu+1}}{d\xi} \cdot \frac{(h+x) \cdot r}{[(h+x)^2 r^2]^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu+1}(h+x,r)}{\partial x} = (\nu+1) \frac{h+x}{\mathfrak{r}^\nu} \cdot \left[(h+x)^2 + r^2\right]^{\frac{\nu-1}{2}} P^{\nu+1}(\xi) + \frac{[(h+x)^2+r^2]^{\frac{\nu+1}{2}}}{\mathfrak{r}^\nu} \cdot \frac{dP^{\nu+1}}{d\xi} \cdot \frac{r^2}{[(h+x)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man, wenn man die zweite mit $\frac{h+x}{r}$ multipliziert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu+1}(h+x,r)}{\partial r} &= -\frac{\nu+1}{\mathfrak{r}^{\nu}}\frac{h+x}{r}\left[(h+x)^2+r^2\right]^{\frac{\nu}{2}} P^{\nu}\left(\frac{(h+x)}{\sqrt{(h+x)^2+r^2}}\right)\\ &\quad+\frac{\nu+1}{\mathfrak{r}^{\nu}}\cdot\frac{1}{r}\left[(h+x)^2+r^2\right]^{\frac{\nu+1}{2}} P^{\nu+1}\left(\frac{(h+x)}{\sqrt{(h+x)^2+r^2}}\right);\end{aligned}\right\}\quad\text{(VI)}$$

also:

$$= -(\nu+1)\frac{h+x}{r}\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{P}_{\nu}(h+x,r)$$

$$+(\nu+1)\cdot\frac{1}{r}\cdot\mathfrak{P}_{\nu+1}(h+x,r).$$

Demnach wird:

$$\frac{1}{2\mathfrak{r}\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = A_0\left\{-\frac{1}{\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_1(h+x,r)-\mathfrak{P}_1(h-x,r)\right.\right. \quad\text{(VII)}$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_2(h+x,r)-\mathfrak{P}_2(h-x,r)\right|$$

$$-\frac{1}{8\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_4(h+x,r)-\mathfrak{P}_4(h-x,r)\right|$$

$$\left.+\frac{1}{16\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_6(h+x,r)-\mathfrak{P}_6(h-x,r)\right|\right\}$$

$$+A_1\left\{+\frac{1}{4\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_2(h+x,r)-\mathfrak{P}_2(h-x,r)\right|\right.$$

$$-\frac{3}{16\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_4(h+x,r)-\mathfrak{P}_4(h-x,r)\right|$$

$$+\frac{5}{64\mathfrak{r}}\left|\mathfrak{P}_6(h+x,r)-\mathfrak{P}_6(h-x,r)\right|$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}^2}\log\frac{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\left|(h+x)^2-\frac{1}{2}r^2\right|-\frac{3}{4\mathfrak{r}^2}(h+x)\sqrt{(h+x)^2+r^2}$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}^2}\log\frac{h-x+\sqrt{(h-x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\left|(h-x)^2-\frac{1}{2}r^2\right|+\frac{3}{4\mathfrak{r}^2}(h-x)\sqrt{(h-x)^2+r^2}$$

$$\left.+3\frac{hx}{\mathfrak{r}^2}\right\}$$

$$+A_2\left\{-\frac{1}{2\mathfrak{r}}\right| \mathfrak{P}_2(h+x,r)-\mathfrak{P}_2(h-x,r)$$

$$+\frac{2}{3\mathfrak{r}}\left| \mathfrak{P}_3(h+x,r)-\mathfrak{P}_3(h-x,r)\right.$$

$$-\frac{3}{8\mathfrak{r}}\left| \mathfrak{P}_4(h+x,r)-\mathfrak{P}_4(h-x,r)\right.$$

$$+\frac{5}{48\mathfrak{r}}\left| \mathfrak{P}_6(h+x,r)-\mathfrak{P}_6(h-x,r)\right|\Big\}$$

$$\frac{1}{2\mathfrak{r}\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}=A_0\left\{-\frac{1}{\mathfrak{r}}\right| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_1(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_2(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_1(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_2(h-x,r)+\frac{r}{\mathfrak{r}}$$

(VIII)
$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}}\left| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_2(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_3(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_2(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_3(h-x,r)\right.$$

$$-\frac{1}{8\mathfrak{r}}\left| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_5(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_5(h-x,r)\right.$$

$$+\frac{1}{16\mathfrak{r}}\left| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_6(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_7(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_6(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_7(h-x,r)\right|\Big\}$$

$$+A_1\left\{+\frac{1}{4\mathfrak{r}}\right| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_2(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_3(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_2(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_3(h-x,r)$$

$$-\frac{3}{16\mathfrak{r}}\left| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_5(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_5(h-x,r)\right.$$

$$+\frac{5}{64\mathfrak{r}}\left| -\frac{h+x}{r}\cdot\mathfrak{P}_6(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_7(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_6(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\mathfrak{P}_7(h-x,r)\right.$$

$$+\frac{1}{2\mathfrak{r}^2}\left| -\log\frac{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\cdot r(h+x)-\log\frac{h-x+\sqrt{(h-x)^2+r^2}}{4\mathfrak{r}}\cdot r(h-x)\right.$$

$$+\frac{1}{12\mathfrak{r}^2}\left| +\frac{r(h+x)\cdot\sqrt{(h+x)^2+r^2}+4r^3-r(h+x)^2}{h+x+\sqrt{(h+x)^2+r^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{r(h-x)\sqrt{(h-x)^2+r^2}+4r^3-r(h-x)^2}{h-x-\sqrt{(h-x)^2+r^2}}\right|-\frac{2r^2}{3\mathfrak{r}^2}\Big\}$$

$$+ A_2 \Big\{ -\frac{1}{2\mathfrak{r}} \Big| -\frac{h+x}{r}\mathfrak{P}_2(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_3(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_2(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_3(h-x,r)$$

$$+\frac{2}{3\mathfrak{r}}\Big| -\frac{h+x}{r}\mathfrak{P}_3(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_3(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h-x,r)-\frac{3r^3}{4\mathfrak{r}^3}\Big|$$

$$-\frac{3}{8\mathfrak{r}}\Big| -\frac{h+x}{r}\mathfrak{P}_4(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_5(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_4(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_5(h-x,r)$$

$$+\frac{5}{48\mathfrak{r}}\Big| -\frac{h+x}{r}\mathfrak{P}_6(h+x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_7(h+x,r)-\frac{h-x}{r}\cdot\mathfrak{P}_6(h-x,r)+\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{P}_7(h-x,r)\Big\}.$$

Schließlich sind noch die Koordinaten x und r auszudrücken als Funktionen von v (der wahren Anomalie) und der Elemente. Dazu hat man bekanntlich, wenn σ die heliozentrische Breite des Planeten und ϱ der Radiusvektor ist:

$$x = \varrho \cdot \sin\sigma$$

$$r = \varrho \cdot \cos\sigma$$

$$\sin\sigma = \sin i \sin(v + \pi - \Omega)$$

also:

$$x = \varrho \cdot \sin i \sin(v + \pi - \Omega)$$

$$r = \varrho\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(v + \pi - \Omega)}.$$

§ 3.

Die bisherigen Entwicklungen sind allgemein gehalten; wir wollen nun eine Anwendung auf das Zodiakallicht machen, das[1]) näherungsweise durch unseren Zylinder dargestellt werden kann. In Wirklichkeit liegen ja die Verhältnisse etwas anders; denn das Zodiakallicht hat nicht die Gestalt eines Zylinders, sondern die eines Rotationsellipsoids und auch die Dichtigkeitsverteilung ist eine etwas andere. Indessen kann es sich hier nur um die Festsetzung von Größenordnungen handeln, und da es von Interese ist, für den

[1]) H. Seeliger: Über kosmische Staubwolken und das Zodiakallicht p. 284.

Planeten Merkur, der sich innerhalb des Zodiakallichts bewegt, die Rechnung durchzuführen, so sollen die obigen Formeln ohne weiteres verwendet werden.

Es sei ohne nähere Begründung für die Dimensionen des Zylinders angenommen: $\mathfrak{r} = 1 \cdot 4$ und $h = 0.14$ $\left(\frac{h}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{10}\right)$, wo der Radius der Erdbahn $= 1$ gesetzt ist.

Um die numerischen Werte K und L mit hinreichender Genauigkeit zu erhalten, genügt es, $j = 12$ zu setzen.

Die Elemente des Merkur, die unserer Rechnung zu Grunde gelegt werden sollen, sind mittlere und dem V. Band der Pariser Annalen entnommen.

Epoche 1850 Januar 1.0 mittl. Pariser Zeit.

Länge des Perihels . . .	π	$=$	75^0	$7'$	$13.''93$
„ „ Knotens	Ω	$=$	46	33	8.75
Neigung gegen die Ekliptik .	i	$=$	7	0	7.71
Exzentrizität	e	$=$	0.2056048		
halbe große Achse	a	$=$	0.3870987	$\log a =$	9.587822—10
mittl. tägl. Bewegung . . .	n	$=$	$14732.''41967$.		

Es sei zunächst noch bemerkt, daß in den Größen K und L der Ausdruck für die Dichtigkeit enthalten ist, dessen Koeffizienten noch unbestimmt sind; man setzt daher:

$$\begin{aligned} K &= A_0\,\alpha_0 + A_1\,\alpha_1 + A_2\,\alpha_2 \\ L &= A_0\,\beta_0 + A_1\,\beta_1 + A_2\,\beta_2. \end{aligned} \tag{I}$$

wo also α_0, α_1, α_2 und β_0, β_1, β_2 die arithmetischen Mittel sind aus 12 berechneten Werten; und zwar ist:

$$\alpha_0 = \frac{1}{12}\left\{\left(\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2}\cdot W_0\right)_{v=0} + \left(\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2} W_0\right)_{v=30^0} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{12}\cdot\left\{\left(\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2} W_1\right)_{v=0} + \left(\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2}\cdot W_1\right)_{v=30^0} + \cdots\cdots\right\} \tag{II a}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{12}\cdot\left\{\left(\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2} W_2\right)_{v=0} + \left(\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{(1+e\cos v)^2} W_2\right)_{v=30^0} + \cdots\cdots\right\}$$

wo die Indices 0, 1, 2 andeuten sollen, daß in den Ausdrücken für die Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$, welche in W enthalten sind, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ gesetzt werden soll.

Ebenso:

$$\beta_0 = \frac{1}{12} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \left[- R_0 \cos v + S_0 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \right)_{v=0} \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \left[- R_0 \cos v + S_0 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \right)_{v=30^\circ}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\beta_1 = \frac{1}{12} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \left[- R_1 \cos v + S_1 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \right)_{v=0} \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \left[- R_1 \cos v + S_1 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \right)_{v=30^\circ} \qquad \text{(II b)}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\beta_2 = \frac{1}{12} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \left[- R_2 \cos v + S_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \right)_{v=0} \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \left[- R_2 \cos v + S_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] \right)_{v=30^\circ}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ,$$

wo für die Indices 0, 1, 2 das eben Gesagte gilt.

Es sind also zunächst zu berechnen die Größen für 12 Werte von v:

R_0	S_0	W_0
R_1	S_1	W_1
R_2	S_2	W_2,

welche durch die Formeln (IV) des 2. Abschnitts gegeben sind. Dazu braucht man aber die Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_1 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_2.$$

Die Indices haben die obige Bedeutung. Die Differentialquotienten sind in Formel (VII) und (VIII) entwickelt und enthalten außer linearen Funktionen vor r und x nur noch Kugelfunktionen, die also zunächst zu berechnen sind. Setzt man zur Abkürzung die Argumente derselben:

$$\xi = \frac{h + x}{\sqrt{(h + x)^2 + r^2}} \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{h - x}{\sqrt{(h - x)^2 + r^2}},$$

so hat man also zu berechnen: $P^1(\xi)$, $P^2(\xi)$, $P^3(\xi)$ etc. . . . $P^7(\xi)$, ebenso $P^1(\eta)$ $P^2(\eta)$ . . . bis $P^7(\eta)$.

Zwischen drei aufeinanderfolgenden Kugelfunktionen besteht aber die lineare Beziehung:

$$\nu \cdot P^\nu = (2\nu - 1)\, P^{\nu-1} - (\nu - 1)\, P^{\nu-2}.$$

Sind also P^0 und P^1 bekannt, so ergeben sich die übrigen P sukzessive.

Nach dieser Relation sind die 7 Kugelfunktionen P^1, P^2 . . . bis P^7 mit den Argumenten ξ und η auf S. 32 und auf S. 33 die $\mathfrak{P}_\nu$ berechnet worden. Auf S. 34 sind die Differentialquotienten $\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{0,1,2}$ und $\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_{0,1,2}$ und S. 35 die $R_{0,1,2}$, $S_{0,1,2}$, $W_{0,1,2}$ (für je 12 Werte von v) gerechnet. Man erhält alsdann nach (II a) und (II b) die Werte von α_0, α_1, α_2 und β_0, β_1, β_2, nämlich:

$$\log \alpha_0 = 8.065430 - 10_n \qquad \log \beta_0 = 7.982588 - 10_n$$
$$\log \alpha_1 = 7.683857 - 10_n \qquad \log \beta_1 = 7.673574 - 10$$
$$\log \alpha_2 = 7.397245 - 10_n \qquad \log \beta_2 = 7.771587 - 10.$$

v	$\log x$	$\log \xi = \log P^{1}$	$\log P^{2}(\xi)$	$\log P^{3}(\xi)$	$\log P^{4}(\xi)$	$\log P^{5}(\xi)$	$\log P^{6}(\xi)$	$\log P^{7}(\xi)$
0^0	8.253498	9.660351	9.269744 n	9.650170 n	9.338774 n	9.250051	9.519770	9.109670
30	8.515006	9.684111	9.175520 n	9.646166 n	9.418352 n	9.101440	9.518842	9.274341
60	8.612458	9.678295	9.201555 n	9.647600 n	9.400246 n	9.145190	9.520540	9.240075
90	8.598709	9.641670	9.326283 n	9.650251 n	9.264240 n	9.327596	9.510460	8.910493
120	8.419444	9.572806	9.462772 n	9.633661 n	8.805024 n	9.478836	9.414434	8.891123 n
150	7.137994	9.475800	9.563266 n	9.581775 n	8.872490	9.538491	9.104958	9.353039 n
180	8.434667 n	9.371628	9.620083 n	9.505671 n	9.257159	9.522284	7.848374 n	9.460004 n
210	8.671333 n	9.307853	9.641558 n	9.452990 n	9.357298	9.491762	8.870105 n	9.468253 n
240	8.702067 n	9.329452	9.635091 n	9.471220 n	9.328622	9.503344	8.723045 n	9.468502 n
270	8.598709 n	9.419260	9.598329 n	9.542337 n	9.137492	9.536248	8.708506	9.430916 n
300	8.329835 n	9.522920	9.522837 n	9.610051 n	8.089449	9.522856	9.286618	9.219891 n
330	6.981667 n	9.606527	9.406561 n	9.644625 n	9.081946 n	9.423412	9.472840	7.630896 n
	$\log r$	$\log \eta = \log P^{1}(\eta)$	$\log P^{2}(\eta)$	$\log P^{3}(\eta)$	$\log P^{4}(\eta)$	$\log P^{5}(\eta)$	$\log P^{6}(\eta)$	$\log P^{7}(\eta)$
0^0	9.487120	9.567624	9.470110 n	9.631580 n	8.743916 n	9.485190	9.403550	8.945353 n
30	9.495535	9.510811	9.534461 n	9.603264 n	8.465204	9.528816	9.246807	9.263314 n
60	9.523318	9.454120	9.578144 n	9.567266 n	9.000404	9.539860	8.988552	9.390300 n
90	9.566561	9.419260	9.598329 n	9.542337 n	9.137492	9.536248	8.708506	9.430915 n
120	9.615297	9.424664	9.595466 n	9.546318 n	9.119881	9.537220	8.764199	9.425888 n
150	9.654222	9.468028	9.568829 n	9.576672 n	8.923953	9.539342	9.066410	9.367661 n
180	9.668289	9.528654	9.516986 n	9.613135 n	7.609140	9.519485	9.304133	9.196238 n
210	9.651862	9.585025	9.444214 n	9.638172 n	8.924244 n	9.461795	9.438064	8.719096 n
240	9.612927	9.624280	9.369479 n	9.648314 n	9.182449 n	9.381326	9.494932	8.581291
270	9.566561	9.641670	9.326283 n	9.650251 n	9.264237 n	9.327595	9.510460	8.910493
300	9.525688	9.636948	9.338796 n	9.649904 n	9.243365 n	9.343659	9.506869	9.241690
330	9.497895	9.611492	9.396802 n	9.645816 n	9.112172 n	9.412720	9.479629	7.866937

v	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_1(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_2(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_3(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_4(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_5(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_6(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_7(h+x,r)$
0°	9.052327	8.053696	7.826098	6.906678	6.209931	5.87162	4.85350
30	9.091251	7.989800	7.867586	7.046912	6.137140	5.96168	5.12432
60	9.111477	8.067919	7.947146	7.132974	6.311100	6.11963	5.27235
90	9.108402	8.259747	8.050447	7.131168	6.661256	6.31085	5.17762
120	9.074684	8.766528	8.139295	6.812536	6.988226	6.42570	5.40427
150	9.004242	8.620150	8.167101	6.986258	7.180701	6.27561	6.05213
180	8.906158	8.689143	8.109261	7.395279	7.194934	6.05555	6.20171
210	8.822740	8.671332	7.997651	7.416846	7.066197	5.95943	6.07246
240	8.806384	8.588955	7.902016	7.236350	6.888004	5.58464	5.80703
270	8.855205	8.470219	7.850172	6.881272	6.715973	5.32418	5.48253
300	9.928061	8.333119	7.825474	5.710013	6.548559	5.71746	5.05588
330	8.997016	8.187539	7.816092	6.643902	6.375857	5.81577	3.36432
	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_1(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_2(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_3(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_4(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_5(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_6(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_7(h-x,r)$
0°	8.940493	8.215848	7.750187	6.235392	6.349535	5.64076	4.55544
30	8.884332	8.281503	7.723827	5.959288	6.396421	5.48793	4.87796
60	8.849642	8.369188	7.753832	6.582492	6.517470	5.36169	5.15895
90	8.855205	8.470221	7.850157	6.831276	6.715978	5.32418	5.48254
120	8.909751	8.565640	8.001579	7.060229	6.962655	5.67472	5.82150
150	8.995717	8.624215	8.159751	7.034725	7.177807	6.23257	6.06151
180	9.077124	8.613926	8.258545	5.803020	7.261835	6.59495	6.03553
210	9.125521	8.525216	8.259660	7.086228	7.164275	6.68104	5.50257
240	9.133442	8.387803	8.175800	7.219097	6.927136	6.54990	5.14542
270	9.108402	8.259747	8.050447	7.131165	6.661255	6.31085	5.17762
300	9.061699	8.188298	7.924157	6.942369	6.467414	6.05537	5.21495
330	9.002964	8.179746	7.820232	6.678060	6.370080	5.82846	3.60724

v	$\log\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_0$	$\log\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_1$	$\log\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_2$	$\log\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_0$	$\log\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_1$	$\log\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_2$	
0°	8.361104 n	7.859198 n	7.482302 n	8.346549 n	8.334494	8.220788	Bezogen auf die Ekliptik
30	8.622556 n	8.124276 n	7.814181 n	8.355030 n	8.332176	8.224559	
60	8.719745 n	8.234897 n	7.863917 n	8.383456 n	8.334695	8.245019	
90	8.705513 n	8.243385 n	7.882240 n	8.429106 n	8.341217	8.280123	
120	8.525498 n	8.092264 n	7.744528 n	8.481127 n	8.346549	8.320665	
150	7.423534 n	6.833147 n	6.498311 n	8.523252 n	8.343999	8.350442	
180	8.539716	8.138397	7.809896	8.538247 n	8.334635	8.355700	
210	8.776759	8.364589	8.029262	8.519854 n	8.329987	8.338217	
240	8.808197	8.371954	8.023623	8.477902 n	8.334795	8.310162	
270	8.705513	8.243385	7.882240	8.429106 n	8.341217	8.280123	
300	8.437084	7.953953	7.583992	8.386588 n	8.342758	8.252610	
330	7.089198	6.591065	6.220108	8.357859 n	8.339312	8.231368	
0°	8.338038 n	7.836197 n	7.459242 n	8.346627 n	8.334675	8.220971	Bezogen auf den Sonnenäquator
30	8.194930 n	7.698014 n	7.323046 n	8.357458 n	8.338516	8.229477	
60	7.714078 n	7.231979 n	6.862131 n	8.387692 n	8.345550	8.255224	
90	7.931763	7.471585	7.111934	8.432231 n	8.351003	8.289098	
120	8.358259	7.924693	7.577722	8.481772 n	8.348928	8.322777	
150	8.514614	8.104009	7.769894	8.522249 n	8.339888	8.346822	
180	8.516654	8.108734	7.786822	8.538347 n	8.335097	8.356102	
210	8.349064	7.938620	7.604982	8.522783 n	8.342047	8.348733	
240	7.802363	7.369401	7.022841	8.482273 n	8.350461	8.324406	
270	7.931763 n	7.471585 n	7.111934 n	8.432231 n	8.351003	8.289098	
300	8.269816 n	7.786964 n	7.417306 n	8.387052 n	8.344549	8.254645	
330	8.360442 n	7.863263 n	7.487980 n	8.357020 n	8.337140	8.229272	

v	$\log R_0$	$\log R_1$	$\log R_2$		$\log S_0$	$\log S_1$	$\log S_2$	
0°	8.371271 n	8.325187	8.215400		7.365488 n	6.958564 n	6.63246 n	Bezogen auf die Ekliptik
30	8.432841 n	8.300704	8.204174		7.400711 n	6.995196 n	6.72016 n	
60	8.482759 n	8.286860	8.219008		6.178977 n	5.778151 n	5.44716 n	
90	8.507046 n	8.299682	8.258494		7.445604	7.064083	6.75128	
120	8.509861 n	8.329987	8.312389		7.516800	7.156549	6.85552	
150	8.523278 n	8.343960	8.350442		6.303196	5.959041	5.66276	
180	8.562233 n	8.317457	8.347681		7.543323 n	7.206016 n	6.92065 n	
210	8.592654 n	8.275427	8.312960		7.554126 n	7.207904 n	6.91645 n	
240	8.575950 n	8.269186	8.278433		6.267172 n	5.903090 n	5.60206 n	
270	8.507046 n	8.299682	8.258494		7.445604	7.064083	6.75128	
300	8.415724 n	8.330414	8.245759		7.428783	7.033826	6.71433	
330	8.375935 n	8.339292	8.231368		6.152288	5.740363	5.41497	
			$\log W_0$	$\log W_1$	$\log W_2$			
0°			8.332620 n	7.925776 n	7.599556 n			
30			8.594050 n	8.188760 n	7.914396 n			
60			8.691188 n	8.294047 n	7.972989 n			
90			8.676776 n	8.295083 n	7.982497 n			
120			8.496528 n	8.136086 n	7.834675 n			
150			8.863323 n	7.128399 n	6.996074 n			
180			8.510424	8.173769	7.887730			
210			8.747614	8.401366	8.109882			
240			8.779272	8.415090	8.112906			
270			8.676776	8.295083	7.982497			
300			8.408477	8.013638	7.693639			
330			6.724276	7.019947	6.832509			

Nun sollen die säkulären Störungen in Perihel und Knoten der Merkurbahn berechnet werden unter der Voraussetzung, daß die Axe des Zylinders senkrecht steht auf der Ebene des Sonnenäquators. Dabei bleiben alle die oben aufgestellten Formeln dieselben und man hat nur die Elemente der Merkurbahn von der Ekliptik auf den Sonnenäquator zu transformieren. Es wurde Knoten ($\Omega_\odot$) und Neigung ($i_\odot$) des Sonnenäquators gegen die Ekliptik bestimmt von:

		$\Omega_\odot$	$i_\odot$	Äquinoktium
Spörer	zu	$74^0\ 36'$	$6^0\ 58'$	1866.5
Schwabe	„	$73^0\ 28'$	$7^0\ 17.7$	1848.5
Carrington	„	$73^0\ 28'$	$7^0\ 17'$	1854.0.

Diese drei Werte habe ich auf das Äquinoktium 1850 reduziert und dann das Mittel genommen und erhalten:

$$\Omega_\odot = 73^0\ 45'\ 48'' \quad \text{und} \quad i_\odot = 7^0\ 10'\ 54''.$$

In dem Dreieck ABC ist (Fig. 1):

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\widehat{AB}) &= \cos\tfrac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BC})\cdot\cos\tfrac{1}{2}a\\
\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\widehat{AB}) &= \cos\tfrac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BC})\cdot\sin\tfrac{1}{2}a\\
\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\widehat{AB}) &= \sin\tfrac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BC})\cdot\cos\tfrac{1}{2}a\\
\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\widehat{AB}) &= \sin\tfrac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BC})\cdot\sin\tfrac{1}{2}a.
\end{aligned}$$

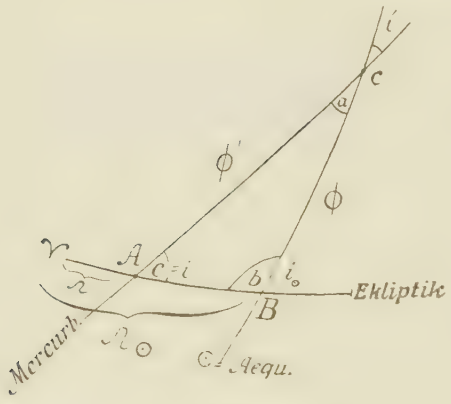


Fig. 1.

Daraus:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BC}) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\widehat{AB})$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BC}) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\widehat{AB})$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BC})}{\cos\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BC})}\cdot\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(b+c).$$

Nun ist gegeben:

$$\begin{aligned}
\widehat{AB} &= \Omega_\odot - \Omega &&= 27^0\ 12'\ 39''\\
\sphericalangle c &= i &&= 7^0\ 0'\ 8''\\
\sphericalangle b &= 180^0 - i_\odot &&= 172^0\ 49'\ 6''.
\end{aligned}$$

Zu berechnen sind:

$$\left.\begin{aligned} \Omega' &= 180^0 + \widehat{BC} \\ i' &= a \\ \pi' - \Omega' &= \pi - \Omega + 180^0 - \widehat{AC} \end{aligned}\right\} \text{ Elemente der Merkurbahn, bezogen auf den Sonnenäquator}$$

$$\log \sin \frac{b-c}{2} = 9.99666 \qquad \log \cos \frac{b-c}{2} = 9.09153$$

$$\log \sin \frac{b+c}{2} = 9.99999 \qquad \log \cos \frac{b+c}{2} = 7.19478$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \widehat{AB} = 9.38378 \qquad \log \operatorname{cotg} \frac{b+c}{2} = 7.19478.$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} \Omega' &= 253^0\ 29'\ 40'' \\ \pi' - \Omega' &= 108^0\ \ 3'\ 45'' \\ i' &= \ \ 3^0\ 20'. \end{aligned}$$

Mit diesen neuen Bahnelementen sind genau dieselben Rechnungsoperationen auszuführen, wie sie auf S. 29—31 angegeben und S. 32—35 durchgeführt worden sind. Siehe S. 34, 38, 39, 40.

Man erhält für diesen Fall:

$$\log \alpha_0 = 7.806180 - 10_n \qquad \log \beta_0 = 8.005223 - 10_n$$
$$\log \alpha_1 = 7.449015 - 10_n \qquad \log \beta_1 = 7.658488 - 10$$
$$\log \alpha_2 = 7.154728 - 10_n \qquad \log \beta_2 = 7.766562 - 10.$$

v	$\log x$	$\log \xi = \log P^{1}(\xi)$	$\log P^{2}(\xi)$	$\log P^{3}(\xi)$	$\log P^{4}(\xi)$	$\log P^{5}(\xi)$	$\log P^{6}(\xi)$	$\log P^{7}(\xi)$
0°	8.230423	9.658268	9.276683 n	9.650303 n	9.331039 n	9.260019	9.919146	9.091456
30	8.087392	9.639212	9.332875 n	9.650089 n	9.253488 n	9.336108	9.508652	8.876171
60	7.606722	9.595349	9.427005 n	9.641522 n	9.006269 n	9.444843	9.455842	8.473882 n
90	7.825012 n	9.529472	9.516132 n	9.613568 n	7.459713	9.518972	9.306567	9.192677 n
120	8.252187 n	9.452823	9.578973 n	9.566372 n	9.006725	9.539846	8.980599	9.392198 n
150	8.409240 n	9.391115	9.611884 n	9.520994 n	9.214647	9.529082	8.202886	9.451068 n
180	8.411592 n	9.376639	9.618059 n	9.509651 n	9.246917	9 524163	7.095377 n	9.458049 n
210	8.243719 n	9.418677	9.598633 n	9.541906 n	9.139330	9.536135	8.702102	9.431425 n
240	7.696331 n	9.492250	9.550545 n	9.592195 n	8.731453	9.535220	9.177253	9.316356 n
270	7.825012	9.565798	9.472626 n	9.630824 n	8.720361 n	9.487313	9.399592	8.962655 n
300	8.162578	9.621180	9.376411 n	9.647788 n	9.166312 n	9.389491	9.491517	8.485429
330	8.252913	9.652296	9.295631 n	9.650504 n	9.308101 n	9.286568	9.516750	9.034526
	$l \log r$	$\log \eta_0 = \log P^{1}(\eta)$	$\log P^{2}(\eta)$	$\log P^{3}(\eta)$	$\log P^{4}(\eta)$	$\log P^{5}(\eta)$	$\log P^{6}(\eta)$	$\log P^{7}(\eta)$
0°	9.487194	9.570393	9.466225 n	9.632703 n	8.777541 n	9.481856	9.409428	8.917394 n
30	9.497569	9.575680	9.458569 n	9.634773 n	8.835830 n	9.475099	9.420244	8.857144 n
60	9.526536	9.573966	9.461087 n	9.634113 n	8 817696 n	9.477348	9.416796	8.877783 n
90	9.568993	9.565798	9.472626 n	9.630824 n	8.720361 n	0.487313	9.399592	8.962655 n
120	9.615769	9.552900	9.489428 n	9.625164 n	8.508235 n	9.500735	9.369752	9.064813 n
150	9.653520	9.538137	9.506777 n	9.618043 n	7.992813 n	9.513062	9 331364	9.151721 n
180	9.668363	9.525334	9.520402 n	9.611360 n	7.946593	9.521481	9.294095	9.210203 n
210	9.653896	9.518432	9.527259 n	9.607579 n	8.270074	9.525244	9.272329	9.236948 n
240	9.616145	9.519923	9.525805 n	9.608406 n	8.218224	9.524473	9.277135	9.231415 n
270	9.568993	9.529472	9.516132 n	9.613568 n	7.459713	9.518972	9.306567	9.192677 n
300	9.526160	9.543981	9.500132 n	9.620940 n	8.269322 n	9.508540	9.347123	9.120272 n
330	9.497193	9.558974	9.481721 n	9.627898 n	8 620157 n	9.494748	9.384221	9.020566 n

v	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_1(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_2(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_3(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_4(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_5(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_6(h+x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_7(h+x,r)$
0°	9.049769	8.059685	7.824806	6.897043	6.247524	5.86815	4.83196
30	9.036369	8.127189	7.841560	6.842116	6.321893	5.89159	4.65627
60	9.012364	8.261035	7.892567	6.674329	6.529918	5.95793	4.39298
90	8.978755	8.414698	7.961417	5.256865	6.765387	6.00226	5.33765
120	8.940684	8.554695	8.029955	6.958169	6.979151	5.90776	5.80722
150	8.912074	8.643702	8.083871	7.298483	7.133877	5.32864	6.09778
180	8.911545	8.687871	8.114369	7.386541	7.198693	4.30481	6.20239
210	8.941911	8.645101	8.111608	7.232266	7.152305	5.84150	6.09406
240	8.984302	8.534649	8.068351	6.699661	6.995480	6.12956	5.76072
270	9.020254	8.381538	7.994192	6.538185	6.759593	6.12632	5.14348
300	9.042913	8.219877	7.912987	6.853244	6.498156	6.02191	4.43755
330	9.052260	8.095559	7.850396	6.907957	6.286388	5.91653	4.83327
	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_1(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_2(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_3(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_4(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_5(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_6(h-x,r)$	$\log \frac{1}{r} \mathfrak{P}_7(h-x,r)$
0°	8.943880	8.212999	7.752864	6.271089	6.348791	5.64975	4.53110
30	8.960304	8.227807	7.788645	6.374326	6.398291	5.72799	4.54951
60	8.987273	8.287701	7.874034	6.470924	6 543883	5.89664	4.77093
90	9.020254	8.381538	7.994192	6.538185	6 759593	6.12623	5.14384
120	9.052179	8.487986	8.123001	6.505351	6.997130	6.36542	5 55976
150	9.073087	8.576677	8.222893	6.132613	7.187812	6.54106	5.89637
180	9.073452	8.616638	8.255714	6.139065	7.262071	6.58280	6.04702
210	9.051227	8.592849	8.205964	6.401254	7 189219	6.46910	5.96651
240	9.015150	8.516259	8.094087	6.199132	7.000608	6.24849	5.69800
270	8.978755	8.414698	7.961417	5.256845	6.765387	6.00226	5.33765
300	8.952376	8.316922	7.846125	5.902902	6.550515	5.79749	4.97903
330	8.940580	8.244933	7.772716	6.146581	6.402778	5.67385	4.69180

Sonnenäquator

$\log R_0$	$\log R_1$	$\log R_2$		$\log S_0$	$\log S_1$	$\log S_2$	
8.368919 *n*	8.326315	8.216140		6.56937	6.16435	5.83885	
8.368603 *n*	8.334313	8.227038		6.80550	6.40140	6.07555	
8.388758 *n*	8.345119	8.254983		6.44248	6.04922	5.72428	
8.434633 *n*	8.349899	8.288518		6.64836 *n*	6.26951 *n*	5.95424 *n*	
8.495294 *n*	8.341375	8.318960		6.92221 *n*	6.56110 *n*	6.26007 *n*	
8.545196 *n*	8.324550	8.339511		6.56820 *n*	6.22531 *n*	5.93450 *n*	
8.559966 *n*	8.319918	8.348908		6.74663	6.40483	6.12057	
8.533632 *n*	8.335016	8.345354		6.95904	6.61595	6.32428	
8.483330 *n*	8.349879	8 324097		6.53148	6.17026	5.86923	
8.434633 *n*	8.349899	8.288518		6.64836 *n*	6.26951 *n*	5.95424 *n*	
8.400762 *n*	8.338895	8.251492		6.83378 *n*	6.43933 *n*	6.12057 *n*	
8.380555 *n*	8.328053	8.224041		6.41497 *n*	6.01284 *n*	5.69020 *n*	
		$\log W_0$	$\log W_1$	$\log W_2$			
		8.312050 *n*	7.905310 *n*	7.578983 *n*			
		8.168910 *n*	7.765370 *n*	7.440594 *n*			
		7.687975 *n*	7.315760 *n*	6.974512 *n*			
		7.905526	7.526468	7.215373			
		8.331771	7.971229	7.670710			
		8.487930	8.143889	7.853759			
		8.489874	8.146717	7.867232			
		8.322364	7.978637	7.689042			
		7.775902	7.415974	7.115610			
		7.905526 *n*	7.526468 *n*	7.215373 *n*			
		8.243708 *n*	7.849296 *n*	7.529687 *n*			
		8.334434 *n*	7.930592 *n*	7.605843 *n*			

Bezogen auf den Sonnenäquator

v	log sin $(v+\pi-\Omega)$	log cos $(v+\pi-\Omega)$	log sin λ	log cos λ	log sin $(v+\pi-\Omega+\lambda)$	log sin $(v+\pi-\Omega-\lambda)$	
0°	9.679612	9.943618	9.677100	9.944357	9.923378	7.496599	Bezogen auf die Ekliptik
30	9.931082	9.717241	9.930193	9.719603	9.950093	7.523263	
60	9.999864	9.397743	9.999862	8.400992	8.700264	6.273510	
90	9.943618	9.679612 n	9.942870	9.682117 n	9.925142 n	7.498634 n	
120	9.717241	9.931082 n	9.714871	9.931961 n	9.948610 n	7.523689 n	
150	9.397743	9.999864 n	8.394495	9.999866 n	8.697017 n	6.270142 n	
180	9.679612 n	9.943618 n	9.677190 n	9.944357 n	9.923378	7.496599	
210	9.931082 n	9.717241 n	9.930193 n	9.719603 n	9.950093	7.523263	
240	9.999864 n	9.397743 n	9.999862 n	8.400992 n	8.700264	6.273510	
270	9.943618 n	9.679612	9.942870 n	9.682117	9.925142 n	7.498634 n	
300	9.717241 n	9.931082	9.714871 n	9.931961	9.948610 n	7.523689 n	
330	9.397743 n	9.999864	8.394495 n	9.999866	8.697017 n	6.270142 n	
0°	9.978053	9.491437 n	9.977982	9.492101 n	9.770816 n	6.698412 n	Bezogen auf den Sonnenäquator
30	9.824984	9.871500 n	9.824579	9.871826 n	9.997476 n	6.923621 n	
60	9.315644	9.990505 n	9.314937	9.990537 n	9.606841 n	6.536833 n	
90	9.491437 n	9.978053 n	9.490772 n	9.978123 n	9.770222	6.698412	
120	9.871500 n	9.824984 n	9.871172 n	9.825389 n	9.997553	6.923621	
150	9.990505 n	9.315644 n	9.990473 n	9.316350 n	9.607517	6.536833	
180	9.978053 n	9.491437	9.977982 n	9.492101	9.770816 n	6.698412 n	
210	9.824984 n	9.871500	9.824579 n	9.871826	9.997476 n	6.923621 n	
240	9.315644 n	9.990505	9.314937 n	9.990537	9.606841 n	6.536833 n	
270	9.491437	9.978053	9.490772	9.978123	9.770222	6.698412	
300	9.871500	9.824984	9.871172	9.825389	9.997553	6.923621	
330	9.990505	9.315644	9.990473	9.316350	9.607517	6.536833	

Die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 bestimmen sich aus den drei Bedingungen (S. 7):

$$\varrho_0 = A_0$$

$$\varrho_1 = A_0 + A_1\left(\frac{s_1}{r}\right) + A_2\left(\frac{s_1}{r}\right)^2$$

$$\varrho_2 = A_0 + A_1\left(\frac{s_2}{r}\right) + A_2\left(\frac{s_2}{r}\right)^2.$$

Man erhält hieraus, wenn man noch setzt: $\frac{s_1}{r} = \sigma_1$, $\frac{s_2}{r} = \sigma_2$,

$$A_0 = \varrho_0$$

$$A_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\sigma_1} + \sigma_1 \frac{\varrho_2 - \varrho_0}{\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2} - \sigma_2 \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2}$$

$$A_2 = \frac{\varrho_0 - \varrho_2}{\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_2^2}.$$

ϱ_0 ist die Dichtigkeit im Mittelpunkt des Zodiakallichtes, ϱ_1 diejenige in der Entfernung s_1 und ϱ_2 die in der Entfernung s_2 vom Mittelpunkt. Für die numerischen Werte dieser Dichtigkeitsstellen, welche unbekannt sind, muß man verschiedene Annahmen machen und dabei aber die Forderung berücksichtigen (S. 7), daß $\varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2$ sei. Wählt man die Dichtigkeit ϱ_2 an der Stelle $s_2 = 1$ (1 = Erdbahnradius) als Einheit und drückt ϱ_1 und ϱ_0 in Vielfachen von ϱ_2 aus, so wird die Gleichung (III b), da $d\pi$ (der Wert der Anomalie des Perihels) als bekannt angesehen wird, als einzige Unbekannte noch ϱ_2 enthalten, nämlich es wird sein:

$$e\frac{d\pi}{dt} = \frac{n\,a^2\,(1-e^2)^2}{1+m} \cdot L \cdot \varrho_2,$$

wobei das Glied $2\,e\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}$ vernachlässigt worden ist; daraus erhält man also ebensoviele Werte für ϱ_2 als man Annahmen gemacht hat über ϱ_0 und ϱ_1. Substituiert man dann umgekehrt diese Werte ϱ_2 in Gleichung (III a), so erhält man die entsprechenden Änderungen im Knoten.

Es sei etwa:

I	II	III
$\varrho_1 = 3 \cdot \varrho_2$	$\varrho_1 = 10 \cdot \varrho_2$	$\varrho_1 = 20 \cdot \varrho_2$
$\varrho_0 = 5 \cdot \varrho_2$	$\varrho_0 = 15 \cdot \varrho_2$	$\varrho_0 = 25 \cdot \varrho_2$,

der Reihe nach für folgende Werte von s_1:

a) $s_1 = 0.5$, b) $s_1 = 0.4$, c) $s_1 = 0.3$, d) $s_1 = 0.2$.

Für diese Werte werden der Reihe nach die Koeffizienten:

	I	II	III
	$A_0 = 5 \cdot \varrho_2$	$A_0 = 15 \cdot \varrho_2$	$A_0 = 25 \cdot \varrho_2$
a)	$A_1 = -\ 5.5\ \varrho^2$	$A_1 = -\ 8.7\ \varrho_2$	$A_1 = +\ 5.3\ \varrho_2$
b)	$A_1 = -\ 8.07\ \varrho_2$	$A_1 = -\ 16.4\ \varrho_2$	$A_1 = -\ 7.1\ \varrho_2$
c)	$A_1 = -\ 10.9\ \varrho_2$	$A_1 = -\ 25.4\ \varrho_2$	$A_1 = -\ 19.4\ \varrho_2$
d)	$A_1 = -\ 16.4\ \varrho_2$	$A_1 = -\ 39.5\ \varrho_2$	$A_1 = -\ 36.0\ \varrho_2$

und

a)	$A_2 = -\ 0.4\ \varrho_2$	$A_2 = -\ 17.0\ \varrho_2$	$A_2 = -\ 57.0\ \varrho_2$
b)	$A_2 = +\ 3.3\ \varrho_2$	$A_2 = -\ 4.7\ \varrho_2$	$A_2 = -\ 37.4\ \varrho_2$
c)	$A_2 = +\ 7.3\ \varrho_2$	$A_2 = +\ 7.6\ \varrho_2$	$A_2 = -\ 20.1\ \varrho_2$
d)	$A_2 = +\ 14.6\ \varrho_2$	$A_2 = +\ 26.7\ \varrho_2$	$A_2 = +\ 2.2\ \varrho_2$.

Mit diesen Koeffizienten berechnen sich die Größen K und L wie folgt:

	$\log K_{\text{Ekl.}}$	$\log K_{\text{Ekl.}}$	$\log K_{\text{Ekl.}}$
a)	8.48544—10 n	8.95400—10 n	9.24047—10 n
b)	8.43775—10 n	8.92148—10 n	9.21221—10 n
c)	8.38399—10 n	8.84942—10 n	9.16673—10 n
d)	8.18667—10 n	8.70140—10 n	9.08743—10 n.

	$L_{\text{Ekl.}}$	$L_{\text{Ekl.}}$	$L_{\text{Ekl.}}$
a)	8.88275—10 n	9.45577—10 n	9.74199—10 n
b)	8.82347—10 n	9.39660—10 n	9.69434—10 n
c)	8.74044—10 n	9.34040—10 n	9.65366—10 n
d)	8.58400—10 n	9.28701—10 n	9.59873—10 n.

	$K_{\odot = \text{Äqu.}}$	$K_{\odot = \text{Äqu.}}$	$K_{\odot = \text{Äqu.}}$
a)	8.20303—10 n	8.67459—10 n	8.97081—10 n
b)	8.14675—10 n	8.63518—10 n	8.93767—10 n
c)	8.08135—10 n	8.54937—10 n	8.88502—10 n
d)	7.82802—10 n	8.36286—10 n	8.79176—10 n.

	L_ς	$L_\odot$	$L_\odot$
a)	$8.89204 - 10\,n$	$9.46352 - 10\,n$	$9.74963 - 10\,n$
b)	$8.83302 - 10\,n$	$9.40478 - 10\,n$	$9.70230 - 10\,n$
c)	$8.75151 - 10\,n$	$9.34852 - 10\,n$	$9.66164 - 10\,n$
d)	$8.60217 - 10\,n$	$9.24492 - 10\,n$	$9.60654 - 10\,n$

Ferner ist (in Sekunden angesetzt), wenn $a' =$ Radius der Sonne ist:

$$\log \frac{a\,n\,(1 - e^2)}{\frac{4}{3}\,\pi \cdot a'^3\,\varrho'_\odot \sin i} \cdot 2\,\mathfrak{r}\,\pi \times 365.25 = 14.53096 \qquad \text{(Ekl.)}$$

$$\log \frac{a\,n\,(1 - e^2)}{\frac{4}{3}\,\pi\,a'^3 \sin i'\,\varrho'_\odot} \cdot 2\,\mathfrak{r}\,\pi \times 365.25 = 14.85249 \qquad (\odot = \text{Äqu.})$$

$$\log \frac{n\,a^3\,(1 - e^2)^2}{\frac{4}{3}\,\pi\,a'^3\,\varrho'_\odot \cdot e}\,2\,\mathfrak{r}\,\pi \times 365.25 = 13.87302$$

$\varrho'_\odot =$ Dichtigkeit der Sonne

$\log \Delta\pi = 9.63347 - 10.$

Man erhält nun für das Verhältnis $\frac{\varrho_2}{\varrho'_\odot}$, d. i. das Verhältnis der Dichtigkeit des Zodiakallichts an der Stelle $s_2 = 1$, also in der Umgebung der Erde, zur Dichtigkeit der Sonne:

	I	II	III
	$\log \frac{\varrho_2}{\varrho'_\odot}$	$\log \frac{\varrho_2}{\varrho'_\odot}$	$\log \frac{\varrho_2}{\varrho'_\odot}$
a)	$6.87770 - 20$	$6.30468 - 20$	$6.01846 - 20$
b)	$6.93698 - 20$	$6.36385 - 20$	$6.06611 - 20$
c)	$7.02001 - 20$	$6.42005 - 20$	$6.10679 - 20$
d)	$7.17635 - 20$	$6.52344 - 20$	$6.16172 - 20.$

Damit ergibt sich die Störung im Knoten der Merkurbahn:

	A) auf Eklipt. bez.			B) auf $\odot =$ Äqu. bez.		
	$\Delta\Omega_{\text{Ekl.}}$	$\Delta\Omega_{\text{Ekl.}}$	$\Delta\Omega_{\text{Ekl.}}$	$\Delta\Omega'$	$\Delta\Omega'$	$\Delta\Omega'$
a)	— 0".78	— 0".62	— 0".62	— 0".86	— 0".68	— 0".69
b)	— 0.81	— 0.65	— 0.64	— 0.86	— 0.71	— 0.72
c)	— 0.86	— 0.53	— 0.64	— 0.90	— 0.66	— 0.70
d)	— 0.78	— 0.57	— 0.60	— 0.72	— 0.55	— 0.64.

Ferner für die Störung im Perihel (bezogen auf den Sonnenäquator):

	I	II	III
	$\Delta\pi'$	$\Delta\pi'$	$\Delta\pi'$
a)	— 0.44	— 0.44	— 0.44
b)	— 0.44	— 0.44	— 0.44
c)	— 0.44	— 0.44	— 0.44
d)	— 0.44	— 0.44	— 0.44.

Nun sind die Störungen $\Delta\pi'$ und $\Delta\Omega'$, welche sich auf den Sonnenäquator beziehen, noch zu transformieren auf die Ekliptik.

Betrachtet man zu dem Zweck das sphärische Dreieck ABC (Fig. 1), so hat man nach dem Sinussatz:

$$\sin \Phi' \cdot \sin i = \sin \Phi \sin i_0$$

und

$$\sin (\Omega_\odot - \Omega) \sin i = \sin \Phi \sin i' .$$

Differentiert man und hält dabei i, i', $i_\odot$, $\Omega_\odot$ konstant, so folgt:

$$\cos \Phi' \sin d\Phi' = \cos \Phi \sin i_\odot \, d\Phi,$$

woraus:

$$d\Phi' = \frac{\cos \Phi \sin i_\odot}{\cos \Phi' \sin i} \, d\Phi; \qquad \text{(I)}$$

ferner:

$$- \cos (\Omega_\odot - \Omega) \sin i \cdot d\Omega = \cos \Phi \sin i' \, d\Phi$$

und hieraus:

$$d\Omega = - \frac{\cos \Phi \sin i'}{\cos (\Omega_\odot - \Omega) \sin i} \, d\Phi . \qquad \text{(II)}$$

Die Änderung im Perihel erhält man aus der Relation:

$$d\pi = d\omega' + d\Phi' + d\Omega \qquad (d\omega' = d\pi' - d\Omega').$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhält man die folgenden Werte:

$$d\Phi' = - 1.598 \cdot d\Omega'$$

$$d\Omega = - 0.152 \cdot d\Omega',$$

woraus für	1) $d\Omega$			2) für $d\pi$		
	I	II	III	I	II	III
a)	+ 0.″13	+ 0.″08	+ 0.″08	+ 1.″92	+ 1.″40	+ 1.″44
b)	+ 0.13	+ 0.09	+ 0.09	+ 1.92	+ 1.49	+ 1.52
c)	+ 0.14	+ 0.06	+ 0.09	+ 2.04	+ 1.36	+ 1.47
d)	+ 0.09	+ 0.06	+ 0.08	+ 1.55	+ 1.05	+ 1.30

Berechnet man nun noch mit einem beliebigen der oben gefundenen Werte für die Dichtigkeit die Masse des Zodiakallichts, so hat man:

$$M_{(z)} = 4\,\pi\,h \int_0^{\mathfrak{r}} \varkappa\, s\, ds.$$

wo

$$\varkappa = A_0 + A_1\left(\frac{s}{\mathfrak{r}}\right) + A_2\left(\frac{s}{\mathfrak{r}}\right)^2.$$

Integriert man also, so wird, wenn man noch die Dichtigkeit der Sonne $\varrho'_\odot = 1$ setzt:

$$M_{(z)} = 4\,\pi\,h\,\mathfrak{r}^2\left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{4}\right)\cdot \varrho_2.$$

Nimmt man nun für ϱ_2 etwa den Wert II b: $\varrho_2 = 6.3638—20$ und dementsprechend für die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 bezw. die Werte 15, — 16.4, — 4.7, so erhält man für die Masse des Zodiakallichts den Wert:

$$\log M_{(z)} = 6.8359—20,$$

bezeichnet man mit $M_\odot$ die Sonnenmasse, so ist diese:

$$M_\odot = \tfrac{4}{3}\,\pi\,a'^3 \cdot 1 \quad (\log M_\odot = 3.6138—10),$$

also das Verhältnis:

$$\log \frac{M_{(z)}}{M_\odot} = 3.2221—10$$

oder:

$$\frac{M_z}{M_\odot} = 0.00000016.$$

Betrachtet man nun die vorstehenden Resultate, so sieht man, daß die Perihelstörung des Merkur zu ihrer Erklärung durch die Einwirkung des Zodiakallichts eine Masse des letzteren verlangt, die ungefähr ein 10 Millionstel der Sonnenmasse beträgt.

Denkt man sich nun die Masse des Zodiakallichts gleichmäßig auf die Oberfläche der Sonne verteilt, so erhält dieselbe einen Zuwachs $d\,M_\odot$ $\left(= \frac{M_{(z)}}{M_\odot}\right)$

von dem angegebenen Betrag. Diese Vermehrung der Sonnenmasse würde nun aber auch eine Änderung in den Umlaufszeiten oder was dasselbe ist, in den mittleren Entfernungen der Planeten zur Folge haben vermöge der Relation:

$$n^2 a^3 = \varkappa^2 (M_\odot + m),$$

wo n die mittlere tägliche Bewegung, a die mittlere Entfernung und m die Masse des Planeten bedeutet. Differenziert man also, so erhält man:

$$3 a^3 n^2 da = \varkappa^2 dM_\odot$$

oder:

$$da = \tfrac{1}{3} a\, dM_\odot. \qquad (M_\odot = 1 \text{ gesetzt})$$

Setzt man beispielsweise $a = 5.202798$, was der mittleren Entfernung des Jupiter von der Sonne gleichkommt, so erhält man für da den Betrag $da = 3.10^{-7}$, also einen Wert, der erst in der 7. Dezimalstelle eine Zahl liefert und infolgedessen nicht nachweisbar ist.

Die Zahlen für die Änderungen des Perihels und Knotens des Merkur, welche sich im ersten Fall ergeben haben, wo die Achse des Zodiakallichts senkrecht auf der Ebene der Ekliptik stehend angenommen wurde, stehen, wie man ohne weiteres sieht, direkt mit der Beobachtung im Widerspruch.

Im zweiten Fall jedoch, wo die Achse des Zodiakallichts senkrecht auf der Ebene des Sonnenäquators steht, tritt vor allem ein Vorzeichenwechsel ein und die Bewegung des Perihels wird rechtläufig. Die Masse des Zodiakallichts könnte hier, wie die Werte für die Änderungen des Perihels zeigen, außerdem noch bedeutend verringert werden, um die vorhandene Störung von $+ 0''.43$ hervorzurufen. Was endlich die Bewegung des Knotens betrifft, so ist diese ebenfalls rechtläufig und zwar von einem Betrag, der innerhalb der Grenzen des mittleren Fehlers liegt.

Denn empirisch hat Newcomb gefunden:

$$\sin i \cdot d\Omega = + 0''.0061 \pm 0''.0052.$$

Auf S. 46 wurde gefunden für $d\Omega$ rund der Wert $+ 0''.1$; damit wird:

$$\sin 7^0\, 0' \cdot 0''.1 = + 0''.012.$$

Dieser Wert ist also gerade noch mit dem von Newcomb zu vereinigen.

Indessen ist ja die angenommene Massenverteilung willkürlich und das gefundene Resultat stellt also nur die Möglichkeit dar, auf diesem Wege die Bewegung des Merkurperihels zu erklären.

Curriculum vitae.

Der Verfasser dieser Arbeit ist geboren zu Schwegenheim in der Rheinpfalz am 2. April 1877. Nach dem Besuch des humanistischen Gymnasiums in Speier studierte derselbe an der Universität München, Berlin und abermals München Mathematik und Astronomie und ist nun seit 15. Februar 1902 als stellvertretender Assistent an der Sternwarte in Bogenhausen bei München tätig.